

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Fisica

**Applicazione del sensore a
piramide alla misura di
discontinuità del fronte d'onda.**

Candidato: Enrico Pinna

Relatore: Dott. Simone Esposito

Correlatore: Prof. Alberto Righini

Anno Accademico 2003-2004

Indice

1	Introduzione.	3
1.1	<i>Extremely Large Telescopes.</i>	3
1.2	Segmentazione dello specchio primario.	5
1.3	Sistemi attivi di allineamento dei segmenti.	9
1.3.1	Il sensore di Shack-Hartmann.	11
1.3.2	Il sensore di SH per la messa in fase di segmenti.	12
1.4	Il sensore di fronte d'onda a piramide.	16
1.4.1	Il test del coltello di Foucault.	16
1.4.2	SP in regime di ottica geometrica.	19
1.4.3	SP con modulazione di <i>tilt</i>	20
2	Fronte d'onda discontinuo e sensore a piramide.	25
2.1	Trattazione diffrattiva.	26
2.2	Simulazione numerica.	35
2.2.1	Descrizione del codice.	36
2.2.2	Risultati.	39
3	Apparato sperimentale.	43
3.1	Il sistema di misura.	43

3.2	Il generatore di pistone.	44
3.3	Il sensore di fronte d'onda.	46
3.4	L'interferometro.	53
4	Misure sperimentali.	55
4.1	Pistone differenziale e segnale del SP.	55
4.2	Sensibilità del sensore.	59
4.2.1	Normalizzazione della scala di sensibilità.	59
4.2.2	Sensibilità e modulazione di tilt.	61
4.3	Misura del pistone differenziale.	64
4.3.1	Misura interferometrica.	65
4.3.2	Misura con SP.	68
4.3.3	Misure a confronto.	71
4.4	Risultati sperimentali ottenuti.	74
5	Applicazione astronomica.	77
5.1	Prossimi sviluppi sperimentali.	79
5.2	Il progetto <i>Active Phasing Experiment</i> (APE).	81
	Conclusioni.	85
	Bibliografia	I

Capitolo 1

Introduzione.

1.1 *Extremely Large Telescopes.*

Alla fine del secolo scorso (1990) il successo ottenuto dal telescopio Keck I [33], seguito dal Keck II, ha aperto la strada ai telescopi a specchio primario segmentato, superando così il limite tecnico costruttivo¹ di $8.4m$ per il diametro degli specchi monolitici. I due Keck sono dotati entrambi di uno specchio primario segmentato di poco meno di $10m$ di diametro.

Oggi la futura generazione di telescopi terrestri è in progettazione con un'ampia varietà di proposte nella classe $20 - 100 m$ (tab.1.1), questi strumenti vengono genericamente indicati come *Extremely Large Telescopes*.

La segmentazione viene eseguita tipicamente utilizzando elementi esagonali di dimensioni lineari dell'ordine di $1 - 2 m$. Se un'elevata segmentazione

¹Questo limite è attualmente dettato da molteplici fattori come la dilatazione termica dei materiali che non consente allo specchio di mantenere la propria forma entro gli stretti limiti richiesti, l'aumento delle probabilità di rottura meccanica, e le problematiche non trascurabili legate al trasporto.

facilita, e quindi rende più economica, la realizzazione dei singoli segmenti, al contrario rende più arduo il loro allineamento e controllo. Il posizionamento dei segmenti, per ottenere delle prestazioni comparabili con quelle di uno specchio monolitico, deve essere compiuto con un'accuratezza superiore a $\lambda/20$ (dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione considerata). Dunque la scelta del tipo di segmentazione risulta essere critica e da ottimizzarsi all'interno del progetto ottico di ogni strumento.

Nome	Diametro m	n. segmenti	stato
Overwhelmingly Large Telescope (OWL) [3]	100	3048	S
Euro 50 [2]	50	>600	S
Thirty Meter Telescope (TMT) [26]	30	$100 < n < 1000$	S
Japanese Extreme Large Telescope (JELT) [21]	30	>200	S
Giant Magellan Telescope (GMT) [22]	21	7	S
Gran Telescopio Canarias [1]	10	36	R
Keck I	10	36	O
Keck II	10	36	O

Tabella 1.1: Panorama attuale dei telescopi a specchio primario segmentato. Nella colonna dello stato attuale valgono: S= fase di studio, R= in realizzazione, O= già operativo. Nella tabella non sono presenti l'Hobby Eberly Telescope (HET) e il South African Large Telescope (SALT) [23] poiché presentano una configurazione a vettore gravitazionale costante, tale quindi da non richiedere un sistema attivo di allineamento. Discorso differente per il Large Binocular Telescope [20] che può essere considerato un interferometro quanto un telescopio a 2 segmenti. E' interessante notare che il disegno ottico per OWL prevede la segmentazione anche dello specchio secondario piano di 34 m di diametro.

1.2 Segmentazione dello specchio primario.

Se la segmentazione ha permesso la realizzazione degli strumenti di classe 10m e la progettazione degli *ELT*, essa introduce anche alcuni svantaggi.

In prima analisi consideriamo uno specchio segmentato perfettamente allineato e con segmenti ideali (intersegmento infinitesimo e bordo a profilo retto). In questo caso la discontinuità introdotta dalla segmentazione comporta effetti diffrattivi aggiuntivi sulla PSF^2 del telescopio rispetto alla diffrazione generata dall'equivalente specchio monolitico. E' stato infatti dimostrato [32] che si ottiene:

$$PSF(\vec{w}) = \left(\frac{AN}{\lambda z} \right)^2 GF(\vec{w}) PSF_s(\vec{w}), \quad (1.1)$$

dove A è la superficie del singolo segmento, N il numero totale degli elementi, z la distanza focale, λ la lunghezza d'onda della radiazione considerata, PSF_s è la PSF del singolo segmento e \vec{w} è il vettore posizione sul piano focale. In sostanza l'effetto diffrattivo della segmentazione ideale è tutto contenuto nel fattore di griglia $GF(\vec{w})$, che risulta essere la trasformata di Fourier della griglia di segmentazione.

Passando al caso reale è necessario tenere conto di altri fattori che contribuiscono a degenerare il fronte d'onda:

1. la larghezza d_s del singolo segmento è necessariamente minore della distanza d fra i centri di due segmenti adiacenti, dunque esiste un'interdistanza $\Delta d = d - d_s$ finita fra i lati dei segmenti;

²Con PSF si indica la *Point Spread Function* che rappresenta la risposta impulsiva del sistema ottico [18], ovvero in altri termini l'immagine di una sorgente puntiforme creata dal sistema.

2. la lavorazione meccanica porta ad avere il profilo del bordo del segmento stondato, piuttosto che ad angolo retto come nel caso ideale;
3. quando le superfici dei segmenti non sono parallele alla superficie ideale si parla di un errore di *tip-tilt*;
4. quando le quote medie dei segmenti non giacciono sulla superficie ideale di errore di *pistone*.

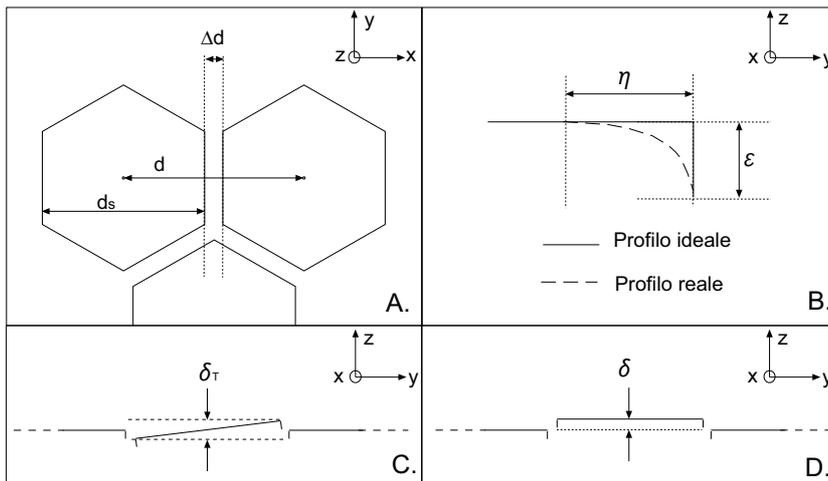


Figura 1.1: A: l'interdistanza Δd fra i bordi di segmenti adiacenti, ad esempio per OWL si stima $\Delta d = 12mm$ per segmenti con $d = 1.5m$; B: il profilo reale di un segmento con indicati i parametri η e ϵ , sempre nel caso di OWL si stimano $\eta \sim 5 \div 20mm$ e $\epsilon < 10\mu m$; C: il segmento centrale affetto da un errore δ_T di puro tilt; D: il segmento centrale affetto da un errore δ di puro pistone. Gli assi x e y individuano il piano dello specchio, mentre z è parallelo all'asse ottico.

Considerando i primi tre termini e assumendo che tutti i segmenti siano

identici in dimensioni e forma, la nuova PSF di tutto lo specchio può essere ancora scritta nella forma (1.1), dove al posto di PSF_s avremo ora:

$$PSF'_s = PSF'_s(\vec{w}, \frac{\Delta d}{d}, \eta, \epsilon, tt) \quad (1.2)$$

in cui η e ϵ sono i parametri caratterizzanti il bordo reale di un segmento (vedi fig.1.1), mentre tt è lo scarto quadratico medio del tip-tilt. Al contrario un errore di pistone non ha influenza sulla PSF_s , ma dà un contributo sulla PSF del telescopio senza generare strutture diffrattive regolari. Si può stimare comunque che un errore di pistone sul fronte d'onda distribuito sugli N segmenti aventi un RMS pari a δ dia un *rapporto di Strehl*³ [7]

$$SR = \frac{1 + (N - 1)e^{-\sigma^2}}{N}, \quad (1.3)$$

dove $\sigma = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$.

In tabella 1.2 sono riportati e messi a confronto i diversi contributi degli effetti di segmentazione per un telescopio ad alta segmentazione calcolati in [32].

Se i primi due fattori sono endemici nella realizzazione del sistema, i secondi sono riconducibili ai 3 gradi di libertà associati a ogni elemento e possono essere minimizzati agendo sugli attuatori di ciascun segmento: ovvero

³Il *rapporto di Strehl* SR è definito come il rapporto fra il picco della PSF in presenza di aberrazioni e della PSF limitata solo dalla diffrazione. Un sistema aberrato distribuisce l'energia su di una superficie maggiore, riducendo quindi il valore del picco centrale e ottenendo $SR < 1$. Questo rapporto è un utile parametro per quantificare la qualità di un'immagine prodotta da un sistema ottico.

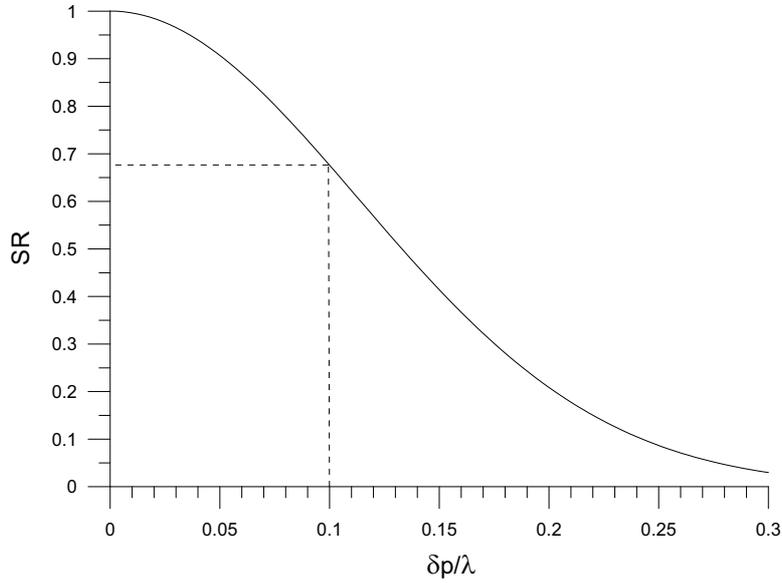


Figura 1.2: Andamento della Strehl ratio in funzione dell'errore di pistone sui segmenti. Nel grafico si è considerato il numero di elementi previsti per OWL ($N = 3084$). Si noti, ad esempio, come per uno specchio altamente segmentato una correzione del pistone a $\lambda/10$ RMS riduca la SR a valori inferiori a 0.7.

Effetto	Valori tipici dei parametri	SR stimata
Interdistanza	$\delta = 12mm, d = 1.5m$	0.98
Profilo	$\epsilon = 0.5\mu m, \eta = 10mm$	0.97
Tip-tilt	$rms = \lambda/30, N = 3084$	0.96
Pistone	$rms = \lambda/30, N = 3084$	0.96

Tabella 1.2: I valori usati in tabella sono quelli previsti nel progetto OWL.

allineando (correzione di tip e tilt) e mettendo in fase (correzione del pistone) i segmenti.

1.3 Sistemi attivi di allineamento dei segmenti.

Abbiamo appena verificato la criticità di un corretto allineamento dei segmenti di uno specchio primario per ottimizzarne la risoluzione spaziale.

Mentre i tre gradi di libertà nel piano del segmento possono essere controllati passivamente, le sollecitazioni gravitazionali, gli effetti termici ed il vento rendono indispensabile un sistema di controllo attivo che agisca sui restanti tre fuori dal piano (tip, tilt e pistone).

Un sistema attivo di controllo si compone di:

- sistema di attuatori meccanici, in genere tre disposti sulla faccia posteriore del segmento;
- sensori di posizione, tipicamente capacitivi, in grado di misurare la posizione relativa dei bordi dei segmenti adiacenti;
- sensore di fronte d'onda.

I primi due elementi compongono un sistema reazionato che consente di mantenere costanti le posizioni dei bordi di due segmenti adiacenti; essendo sensibile soltanto agli spostamenti relativi, questo sistema necessita di una calibrazione ottica che definisca le corrette posizioni al fine di ottenere la migliore approssimazione alla superficie continua.

La calibrazione viene operata illuminando l'intera superficie dello specchio primario con un'onda piana ed analizzandone il fronte d'onda riflesso con un sensore. L'illuminazione del primario è ottenuta puntando una stella con il telescopio in esame. Il sensore di fronte d'onda deve quindi essere

in grado di misurare tip, tilt e pistone di ogni segmento attraverso le deformazioni introdotte nel fronte d'onda. Queste misure vengono quindi tradotte in comandi di correzione per gli attuatori. Per ottimizzare l'allineamento la procedura di misura-correzione viene iterata più volte. L'intera calibrazione viene periodicamente ripetuta e quanto più stringenti sono le specifiche di allineamento, tanto maggiore sarà la frequenza delle calibrazioni necessarie.

Veniamo ora quindi ai sensori di fronte d'onda.

Nel 1900 Hartmann [19] propose un test per superfici ottiche di telescopi proprio basato sull'analisi del fronte d'onda. Nel 1971 Shack e Platt [27] svilupparono questo sensore per applicazioni militari ed in seguito venne indicato come il sensore di Shack-Hartmann (SH) ed utilizzato nei sistemi di ottica adattiva. Oggi è ancora ampiamente il sensore di fronte d'onda più utilizzato nei sistemi adattivi e da questo è derivato il sistema di messa in fase dei telescopi Keck.

In seguito sono stati proposti sensori basati su principi differenti, fra cui nel 1996 da R. Ragazzoni [28] il sensore di fronte d'onda a piramide.

Il lavoro di tesi è volto a dimostrare sperimentalmente la capacità di questo sensore di misurare la differenza di fase di fronti d'onda discontinui, e dunque la possibilità di una sua applicazione come sensore per la messa in fase di specchi segmentati.

Poiché il sensore di SH è il naturale termine di paragone, nei prossimi paragrafi daremo qualche cenno sul suo principio di funzionamento e sulla sua applicazione alla messa in fase degli specchi segmentati.

1.3.1 Il sensore di Shack-Hartmann.

Il principio di funzionamento di questo dispositivo consiste nel porre sulla pupilla di ingresso del sistema (o una sua immagine) una griglia di lenti l_i con stessa focale f_l e stesso diametro D_l , in modo da focalizzare separatamente piccole porzioni del fronte d'onda su uno stesso rivelatore. Nel caso di fronte d'onda piano incidente sulle l_i (fig.1.3 a sinistra), queste produrranno immagini con baricentri equidistanziati sul piano del rivelatore; mentre, nel caso di un fronte d'onda aberrato (fig.1.3 a destra), il tilt locale della porzione di onda incidente su l_i produrrà uno spostamento del baricentro dell' i -esima immagine.

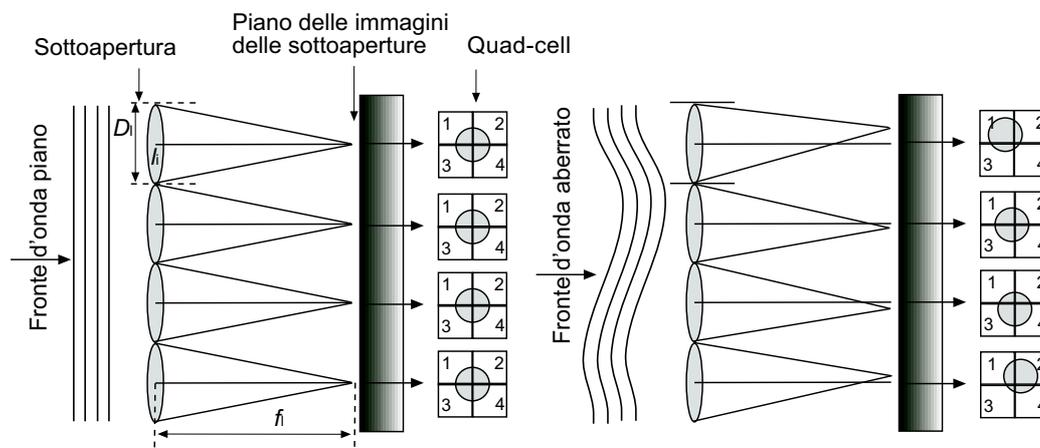


Figura 1.3: Principio di funzionamento del sensore di Shack-Hartmann. A sinistra un fronte d'onda piano genera immagini centrate rispetto alla *quad-cell*, mentre, a destra l'aberrazione sbilancia l'immagine.

Il modo più semplice per misurare quantitativamente questo segnale è assegnare una *quad-cell* (matrice 2X2 di elementi fotosensibili) ad ogni sot-

toapertura. Si definiscono le quantità:

$$S_x = \frac{(I_2 + I_4) - (I_1 + I_3)}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4} \quad (1.4)$$

$$S_y = \frac{(I_1 + I_2) - (I_3 + I_4)}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4} \quad (1.5)$$

dove I_i indica l'intensità registrata dall' i -esimo elemento della *quad-cell*. In assenza di aberrazioni l'immagine prodotta si disporrà simmetricamente sui quattro elementi, dunque avrò $S_x = S_y = 0$; in presenza di aberrazione è semplice mostrare che S_x ed S_y saranno diverse da zero e proporzionali alle derivate spaziali locali del fronte d'onda incidente (nelle 2 direzioni del piano) divise per la larghezza angolare dello spot.

1.3.2 Il sensore di SH per la messa in fase di segmenti.

Il sensore di SH può essere usato nella configurazione appena descritta per rimuovere gli errori di tip e tilt dei segmenti di uno specchio, ma risulta insensibile all'errore pistone. Ispirato al sensore di SH, nel 1986 [5] fu proposto un metodo per la stima della differenza di fase presente fra i bordi di due segmenti ed è quello ancora oggi utilizzato per la messa in fase degli specchi primari dei telescopi Keck, dunque attualmente l'unico operativamente impiegato.

Questa tecnica di misura usa come sorgente una stella naturale e consiste nel mascherare l'immagine della pupilla creando una sottoapertura in corrispondenza di ogni intersegmento; le dimensioni di ciascuna sottoapertura, proiettata sul priario, devono risultare piccole rispetto al diametro di coerenza atmosferica r_0 (tipicamente dell'ordine di 20cm a $\lambda = 0.5\mu\text{m}$), affinché la

turbolenza atmosferica non degeneri significativamente il fronte d'onda sulla sottoapertura.

La geometria dello specchio primario dei Keck è definita da 3 anelli di esagoni concentrici, se M è il numero di anelli significa che si hanno $N = 3M(M + 1) = 36$ elementi con $(5/2)N - 6 = 84$ intersegmenti. Poiché i 6 intersegmenti interni sono oscurati dallo specchio terziario e dai *baffles* del secondario, la maschera è composta da 78 sottoaperture circolari disposte come mostrato in fig.1.4. Ad ognuna di queste viene allineato un sistema prisma-lente che genera un'immagine della sottoapertura su un rivelatore

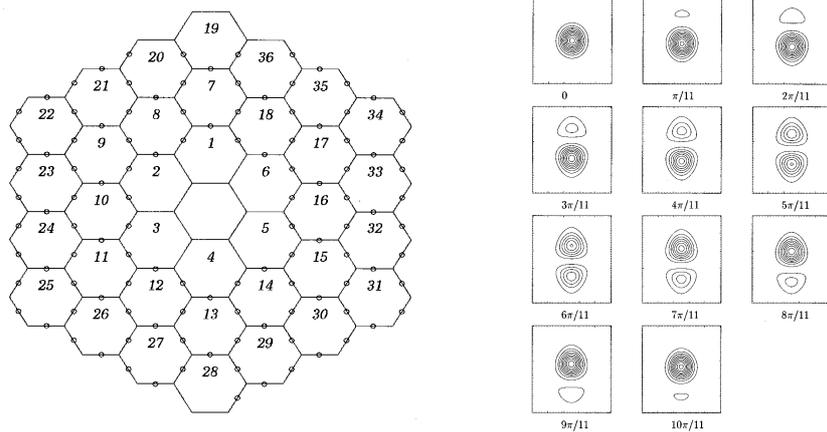


Figura 1.4: **A sinistra:** schema dello specchio primario dei telescopi Keck formati da 36 elementi esagonali di $0.9m$ di lato. Le circonferenze sugli intersegmenti rappresentano le sottoaperture che, riscalate alle dimensioni dello specchio, sono di $12cm$ di diametro ciascuna. **A destra:** pattern diffrattivi simulati di una sottoapertura centrata fra due segmenti perfettamente allineati e con un pistone fisico di δ tale che $k\delta = 0, \pi/11, 2\pi/11, \dots, 10\pi/11$.

E' possibile simulare numericamente il *pattern* diffrattivo prodotto sul piano focale da una sottoapertura posta sull'intersegmento di due elementi aventi una differenza di pistone pari a $k\delta$ (fig.1.4 a destra) [8]. Calcolan-

do per ciascuna sottoapertura la cross-correlazione fra l'immagine ottenuta sul rivelatore e un campione di pattern simulati per differenti valori di δ , si ottiene una stima del pistone differenziale. In questa configurazione non è più sufficiente assegnare ad ogni sottoapertura una *quad-cell*, infatti non si intende più misurare lo spostamento della PSF sul piano, ma è necessario acquisire la forma del pattern diffrattivo generato. Al fine di ottenere una risoluzione spaziale sufficiente per confrontare l'immagine con gli 11 pattern di riferimento, ad ogni sottoapertura viene assegnata una matrice composta da 33×33 *pixels*, inoltre è necessario che le immagini generate siano sufficientemente distanti tanto da poter trascurare, su ciascuna, l'intensità generata dalle sottoaperture vicine.

Dall'inizio delle osservazioni scientifiche del Keck I (1993) ad oggi la tecnica di messa in fase dei segmenti è stata rivista ed ottimizzata [8] [6] [9], lasciando comunque inalterato il principio di misura appena descritto.

Procedura	Banda stretta	Banda larga 1	Banda larga 2	Banda larga 3
Intervallo di cattura	$0.1\mu m$	$\pm 1\mu m$	$\pm 3\mu m$	$\pm 30\mu m$
Accuratezza	$6nm$	$30nm$	$100nm$	$1\mu m$
Tempo di esecuzione	$20min$	$30min$	$30min$	$30min$
Magnitudine limite	5	6	5	4

Tabella 1.3: Prestazioni delle tecniche di messa in fase impiegate ai telescopi Keck. Il metodo a banda stretta ha la miglior accuratezza, ma il range di cattura molto limitato richiede un precedente allineamento compiuto con le tecniche a banda larga. Queste si distinguono dalla prima per l'utilizzo di filtri a banda finita di frequenza che aumentano la coerenza della radiazione stellare.

Nonostante l'efficacia dimostrata (tab.1.3) la tecnica basata sul sensore di

SH presenta molteplici limitazioni; fra queste la principale è che necessita di un sensore dedicato, il quale non può essere utilizzato durante le osservazioni. Questo implica che del tempo osservativo vada periodicamente perso per le sessioni di calibrazione del sistema attivo di allineamento e che non sia garantito con continuità il miglior rendimento dello specchio⁴. Inoltre le difficoltà di allineamento e la necessità di avere un elevato numero di *pixels* per sottoapertura rendono difficile la scalabilità di questa tecnica a sistemi con un numero di segmenti di 1 o 2 ordini di grandezza superiore come quelli dei progetti *ELT*.

Queste motivazioni hanno fortemente incoraggiato la proposta di nuove tecniche per la messa in fase dei segmenti, fra queste le più significative sono state quelle con l'interferometro Mach-Zehnder [25], con il sensore di curvatura [4] e nel 2001 con il sensore a piramide [11]. Nel suo lavoro Esposito dimostra con simulazioni di ottica diffrattiva come il sensore a piramide in configurazione di ottica adattiva possa essere usato per misurare il pistone differenziale dei segmenti.

Nel paragrafo successivo vengono illustrati i principi di funzionamento del sensore di fronte d'onda a piramide nel caso di fronti d'onda con derivata spaziale finita; nel prossimo capitolo verrà illustrato il comportamento di questo sensore in caso di fronte d'onda discontinuo, dunque del fronte riflesso da due segmenti adiacenti aventi pistone differenziale non nullo.

⁴Una volta rimossi tip e tilt per ogni segmento ed allineato lo strumento, la procedura di correzione della fase richiede tempo nell'ordine delle 3-4 ore, mentre la stabilità entro gli $80nm$ rms è stata verificata su tempi scala delle decine di giorni [8].

1.4 Il sensore di fronte d'onda a piramide.

Il SP è costituito da una piramide a base quadrata, due lenti convergenti ed un sensore di immagine disposti come rappresentato in fig.1.8.

E' noto [30] che il principio di funzionamento del SP è di fatto quello del test di Foucault [16].

1.4.1 Il test del coltello di Foucault.

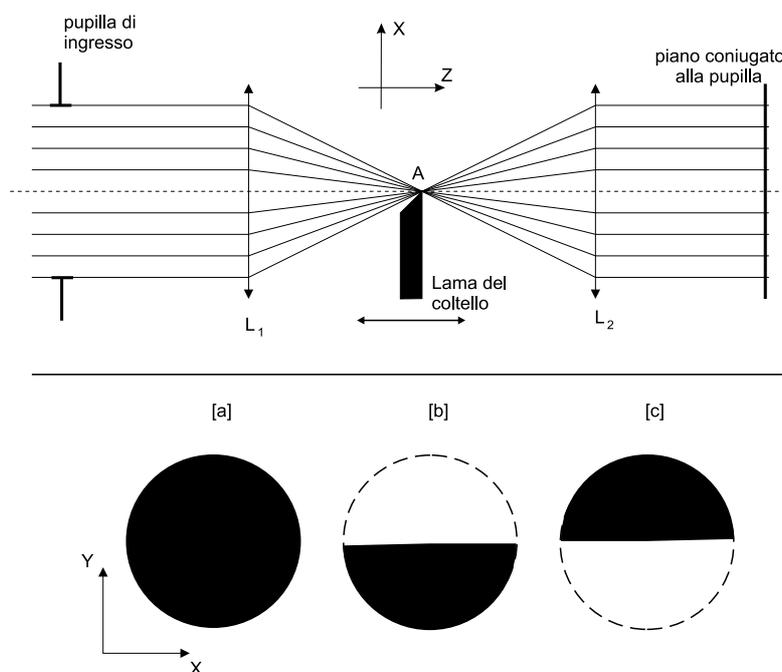


Figura 1.5: **In alto:** test del coltello di Foucault nel caso di un fronte d'onda privo di aberrazioni. Si noti che la lama del coltello è posta nel fuoco A di L_1 e L_2 . **In basso:** Nel caso rappresentato in alto l'immagine della pupilla sarà uniformemente illuminata come in [a], se il coltello viene posto a sinistra di A i raggi provenienti dalla parte inferiore della pupilla vengono intercettati e si osserverà una distribuzione di intensità come in [b], viceversa questa si presenterà come in [c] qualora il coltello sia posto a destra di A .

Questa tecnica venne adottata dai costruttori di lenti fin dalla fine del XIX secolo per determinare la qualità dei componenti ottici. In breve il test consiste nel porre un filtro spaziale (coltello) sul fuoco nominale di una lente posta sulla pupilla del sistema ottico in esame e fare l'immagine di quest'ultima grazie ad una seconda lente (fig.1.5).

Un sistema ottico privo di aberrazioni esaminato attraverso questo sistema produrrà un'immagine della pupilla uniforme, mentre delle aberrazioni generano delle distribuzioni di intensità spazialmente inomogenee come mostrato in fig.1.6.

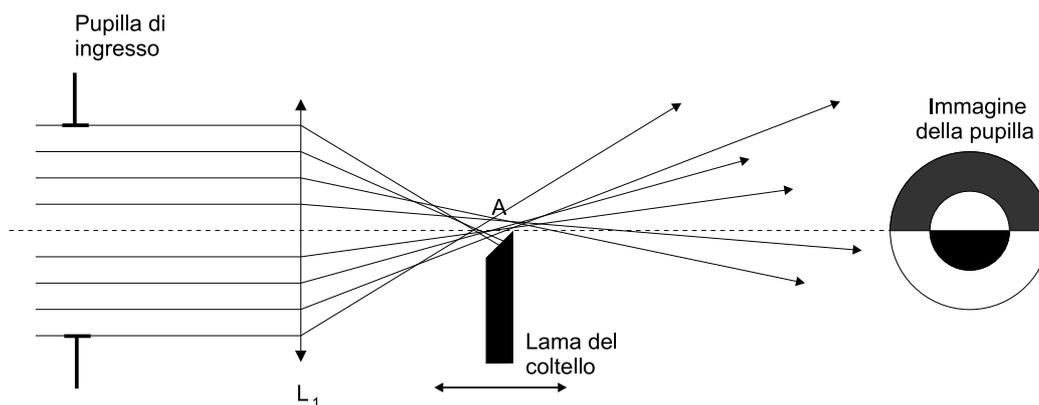


Figura 1.6: Fronte d'onda affetto da aberrazione sferica esaminato con il test di Foucault. I raggi vicini all'asse ottico vengono focalizzati a destra del coltello e generano la distribuzione centrale, mentre quelli periferici a distanza minore generano quella esterna. Come nel caso di quella sferica le aberrazioni più comuni generano distribuzioni riconoscibili, in questo modo è in genere possibile determinare l'aberrazione dominante nel sistema ottico in esame.

Se ora si sostituisce al coltello un prisma con il vertice nella stessa posizione della lama, si ottiene l'equivalente di due test di Foucault simultanei (fig.1.7). Infatti le due facce del solido aventi differente inclinazione equi-

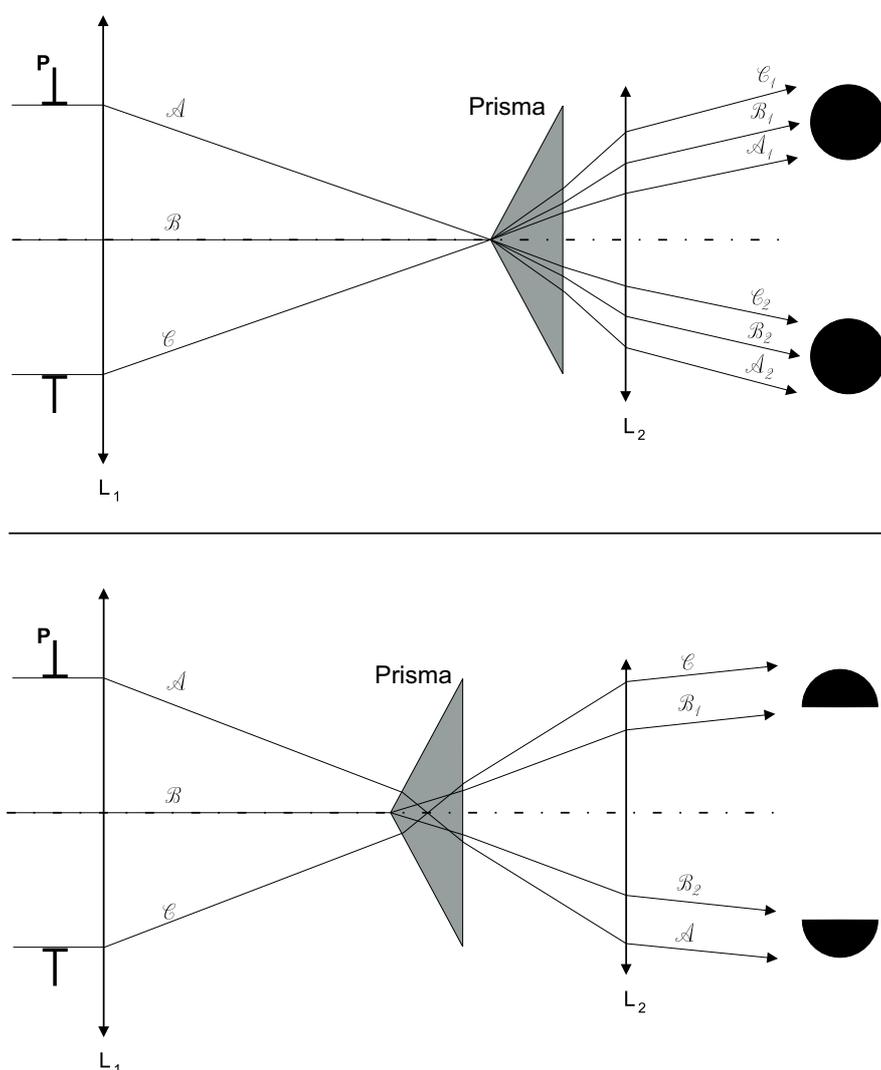


Figura 1.7: **In alto:** il coltello è sostituito da un prisma. Nel caso di fronte d'onda non aberrato vengono generate due immagini della pupilla con distribuzione di intensità uniforme e di pari intensità. **In basso:** lo spigolo del prisma è posto a sinistra del piano focale e si generano pupille con distribuzioni complementari e del tutto analoghe a quanto ottenuto con il coltello (fig.1.6).

valgono a due filtri spaziali aventi in comune lo spigolo; i due filtri risultano spazialmente complementari e saranno generate due immagini della pupilla di

ingresso, separate spazialmente grazie all'inclinazione delle facce del prisma.

La piramide, in regime di ottica geometrica, risulta [30] equivalere a due prismi posizionati con spigoli ortogonali; si ha quindi che il SP opera quattro test di Foucault simultanei, generando così attraverso L_2 quattro distinte immagini della pupilla.

1.4.2 SP in regime di ottica geometrica.

Vediamo ora il comportamento del SP in presenza di un fronte d'onda aberrato.

In riferimento alla fig.1.8 sia la pupilla di ingresso coincidente con la lente L_1 e W sia il fronte d'onda aberrato incidente su di essa, mentre W_0 quello teorico privo di aberrazioni. Siano (x, y) le coordinate sulla pupilla di ingresso, al punto $P(x, y)$ sul fronte W possiamo associare un raggio che si origina da questo. Il raggio formato da W , a causa dell'aberrazione, formerà un angolo θ con il corrispondente raggio originato da W_0 . Di conseguenza il raggio aberrato sul piano focale non inciderà più sul vertice della piramide, ma ad una distanza $\Delta\eta$ da questo. L'angolo θ è legato a $\Delta\eta$ dalla relazione geometrica:

$$\theta = \frac{\Delta\eta}{f} \quad (1.6)$$

dove f è la lunghezza focale di L_1 .

A sua volta θ è misura della pendenza del fronte d'onda lungo la direzione y $\partial W(x, y)/\partial y$, dunque si ha:

$$\Delta\eta = f \cdot \frac{\partial W(x, y)}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Sempre in riferimento alla fig.1.8, lo spostamento di $\Delta\eta$ del punto di incidenza del raggio fa sì che solo una delle quattro pupille venga illuminata dalla porzione del fronte d'onda incidente in $P(x, y)$. Lo sbilanciamento di intensità nelle regioni delle quattro immagini della pupilla corrispondenti a $P(x, y)$ rivela il segno della pendenza del fronte d'onda incidente in quel punto.

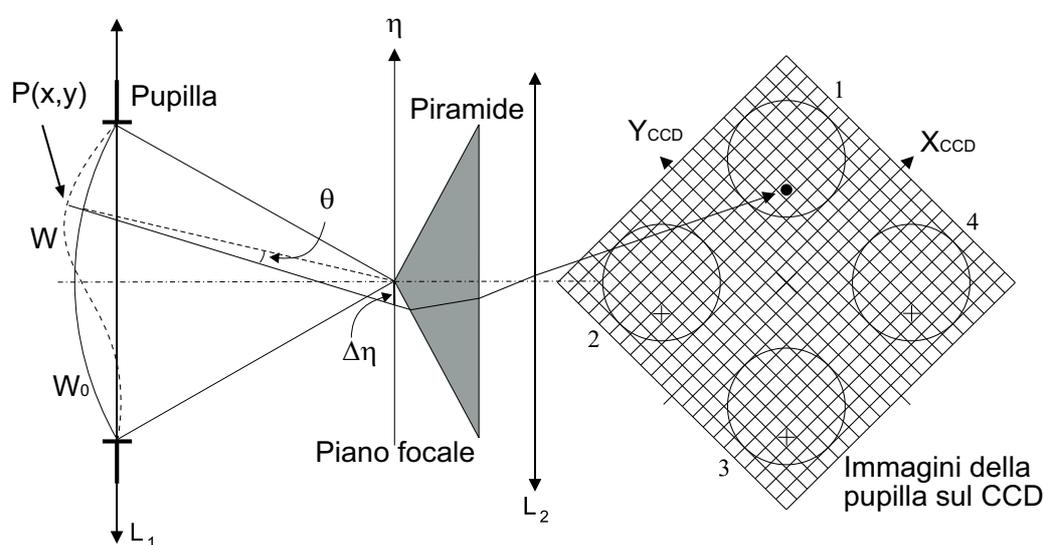


Figura 1.8: Il sensore a piramide. Sul punto focale di L_1 è posta una piramide con gli spigoli allineati con gli assi x e y . Sulla pupilla di ingresso incide un fronte aberrato W_0 , mentre W rappresenta un fronte ideale privo di aberrazioni. L_2 focalizza le quattro immagini della pupilla di ingresso generate dalla piramide su un rivelatore CCD.

1.4.3 SP con modulazione di *tilt*.

Un'importante evoluzione del sensore a piramide è data dall'introduzione di un nuovo elemento nella configurazione: lo specchio di *tip-tilt* (fig.1.9).

Questo è uno specchio piano in grado di oscillare intorno ai due assi della

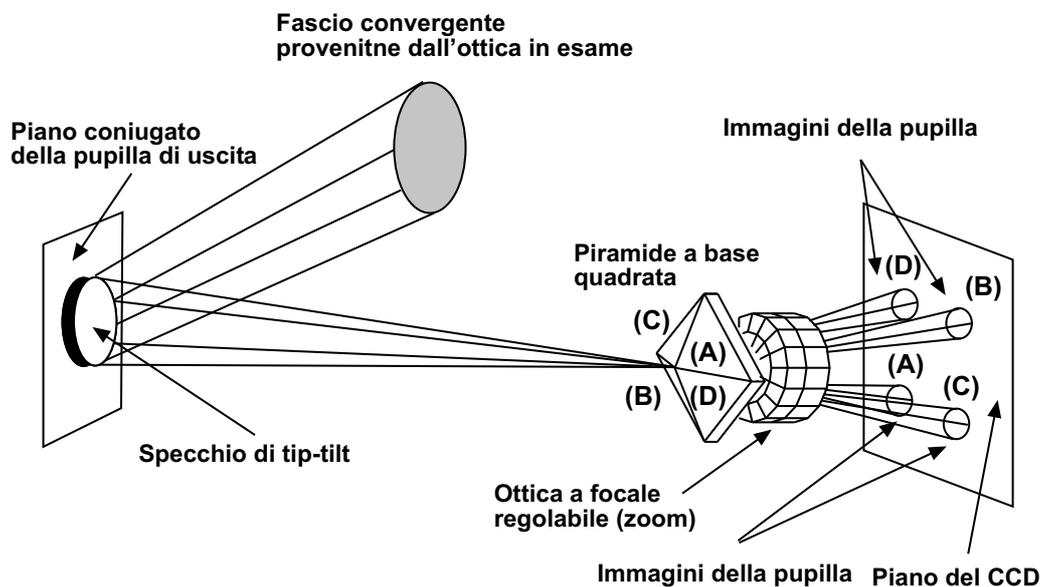


Figura 1.9: Schema tridimensionale del sensore a piramide con modulazione di tilt. Qui si considera il fascio da esaminare già convergente e focalizzato sul vertice della piramide.

sua superficie (3.3). Viene posto lungo il fascio nel piano di una immagine della pupilla di uscita dell'elemento ottico in esame (del telescopio nel caso astronomico). In questa configurazione le oscillazioni dello specchio generano la traslazione del punto focale. Comandato opportunamente fa compiere al fascio focalizzato una circonferenza attorno al vertice della piramide (fig.1.10 a sinistra) a velocità costante. In questo caso gli archi a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sono identici e dunque il fascio spende lo stesso tempo sulle quattro facce della piramide illuminando equamente le quattro pupille che si presenteranno quindi con la medesima intensità.

Nel caso sia presente un'aberrazione, i raggi continueranno a seguire traiettorie circolari sul piano focale, ma con centro spostato di $\Delta\eta$ rispetto al vertice della piramide. In questo caso gli archi b_i (fig.1.10 a destra) hanno lunghezze

differenti e, percorsi ancora a velocità costante, danno pupille con intensità proporzionale alla loro lunghezza.

E' possibile ora rendere quantitative le stime di $\partial W(x, y)/\partial y$ e $\partial W(x, y)/\partial x$ definendo le quantità:

$$S_x(x, y) = \frac{\left(I_1(x, y) + I_4(x, y) \right) - \left(I_2(x, y) + I_3(x, y) \right)}{\sum_{i=1}^4 I_i(x, y)} \quad (1.8)$$

$$S_y(x, y) = \frac{\left(I_1(x, y) + I_2(x, y) \right) - \left(I_4(x, y) + I_3(x, y) \right)}{\sum_{i=1}^4 I_i(x, y)},$$

S_x e S_y verranno in seguito chiamati *segnali*.

E' possibile dimostrare geometricamente [31] che fra le derivate parziali del fronte d'onda incidente e i segnali sussiste la relazione:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \frac{R}{f} \sin\left(\frac{\pi}{2} S_x\right) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \frac{R}{f} \sin\left(\frac{\pi}{2} S_y\right),$$

dove R è il raggio di modulazione (raggio della circonferenza percorsa dai raggi sul piano focale) introdotta dallo specchio di tip-tilt.

Le 1.9 permettono quindi di avere una stima della pendenza nel punto $P(x, y)$ del fronte d'onda aberrato a partire dall'intensità misurata sulle quattro pupille. Intorno agli zeri dei segnali è possibile linearizzare le 1.9 ed ottenere:

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = \frac{R \pi}{f 2} S_x \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = \frac{R \pi}{f 2} S_y.$$

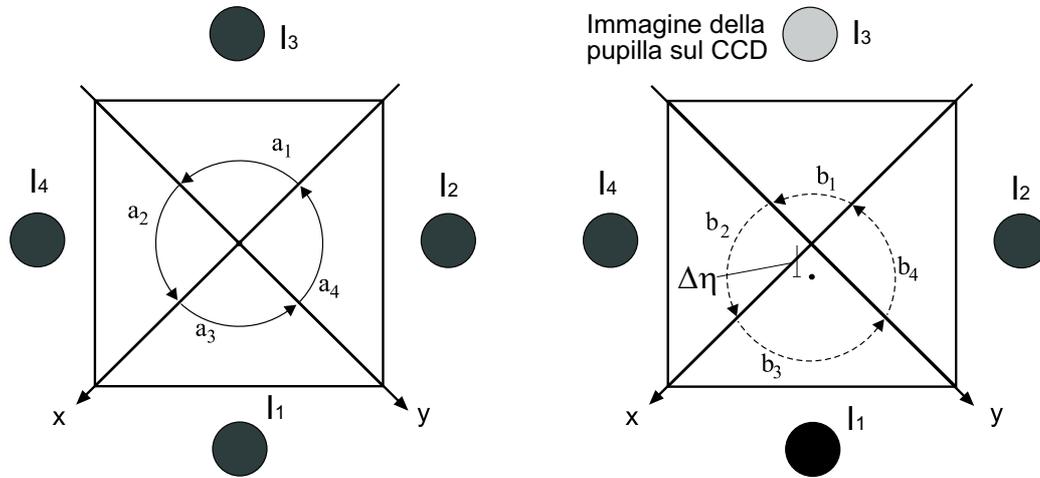


Figura 1.10: Il quadrato e le sue diagonali rappresentano gli spigoli della piramide osservata nella direzione dell'asse ottico. La circonferenza è invece il percorso compiuto dai raggi sul piano focale a causa dell'azione dello specchio di tip-tilt. **A sinistra:** caso di fronte incidente ideale, la circonferenza è centrata sul vertice della piramide. **A destra:** l'aberrazione del fronte incidente trasla il centro della circonferenza di $\Delta\eta$ rendendo diseguali le lunghezze degli archi b_i e sbilanciando le intensità I_i sulle pupille.

E' importante notare che attraverso R (parametro libero nel sistema ottico) è possibile variare il guadagno del sensore in quanto risulta:

$$S \propto \frac{1}{R}. \tag{1.11}$$

Inoltre il numero di pixels del rivelatore con il quale vengono campionate le quattro pupille determina la risoluzione spaziale con la quale saranno note $\partial W(x, y)/\partial y$ e $\partial W(x, y)/\partial x$. Se L_2 è una lente a focale variabile è possibile variare il rapporto di ingrandimento fra la pupilla e le sue immagini sul rivelatore, quindi con estrema semplicità si può scegliere la risoluzione spaziale desiderata.

La possibilità di poter variare con semplicità il guadagno e la risoluzione

del sensore sono caratteristiche innovative ed estremamente vantaggiose del SP rispetto al tradizionale sensore di SH. In quest'ultimo la risoluzione spaziale è determinata dal numero di microlenti, mentre il guadagno dal loro rapporto focale diametro; entrambe sono quindi parametri fissi.

Capitolo 2

Fronte d'onda discontinuo e sensore a piramide.

Il fatto che il sensore a piramide in configurazione di ottica adattiva possa essere sensibile ai piston differenziali fra i segmenti risulta evidente considerando le seguenti espressioni integrali dei segnali del sensore in funzione delle coordinate di pupilla (x_1, y_1) [12]:

$$\begin{aligned} S_x(x_1, y_1) &\propto |A_0| \int_{-B(y_1)}^{B(y_1)} \frac{\sin[\phi(x, y_1) - \phi(x_1, y_1)]}{2\pi(x - x_1)} \frac{\sin[a_{tt}(x - x_1)]}{x - x_1} dx \quad (2.1) \\ S_y(x_1, y_1) &\propto |A_0| \int_{-B(x_1)}^{B(x_1)} \frac{\sin[\phi(x_1, y) - \phi(x_1, y_1)]}{2\pi(y - y_1)} \frac{\sin[a_{tt}(y - y_1)]}{y - y_1} dy, \end{aligned}$$

dove $\phi(x, y)$ è la fase del campo elettrico incidente, A_0 la sua ampiezza e a_{tt} l'ampiezza del tilt del fronte d'onda introdotto dallo specchio vibrante¹.

E' di semplice verifica che, considerando una discontinuità di fase parallela all'asse y , questa genererà un segnale $S_x \neq 0$.

¹Per un angolo di modulazione pari a λ/D corrisponde un tilt del fronte d'onda in fase $2\pi x/D$ che è dunque il valore di a_{tt} è $2\pi/D$

Nel lavoro del 2001 [11] Esposito simula il comportamento del SP senza modulazione di tilt nel caso di uno specchio composto da 52 segmenti quadrati, riscontrando la presenza del segnale localizzato in corrispondenza della discontinuità e con dipendenza dal pistone differenziale $\delta\phi$ fra i due segmenti del tipo: $S_x \propto \sin(\delta\phi)$.

Le 2.1 sono ottenute considerando il segnale generato dalla piramide equivalente a quello prodotto da due prismi con spigoli ortogonali. Questo è rigorosamente vero in approssimazione di ottica geometrica, ma non in regime diffrattivo.

Le trattazioni formali in ottica di Fourier del sensore a piramide presenti in letteratura [15], oltre a considerare la piramide come due prismi, analizzano il comportamento del sensore nel caso di fronti d'onda aberrati, ma con derivate spaziali finite. Poiché non è lecito a priori estendere al caso di fronte d'onda discontinuo i risultati ottenuti nel caso continuo, sarà sviluppata nel paragrafo seguente una semplice trattazione in ottica di Fourier al fine di trovare un riscontro formale dei risultati previsti dalle simulazioni ed ottenuti poi nelle misure sperimentali.

2.1 Trattazione diffrattiva.

Si prenda in esame la configurazione ottica rappresentata in fig.2.1. La lente L e la lente di camera L_C siano di pari focale f e poste con i fuochi coincidenti con il vertice della piramide. La pupilla di ingresso del sistema coincide con la prima superficie di L mentre L_C produce un'immagine della pupilla sul piano a distanza $2f$.

Una trattazione analitica del problema può essere affrontata schematiz-

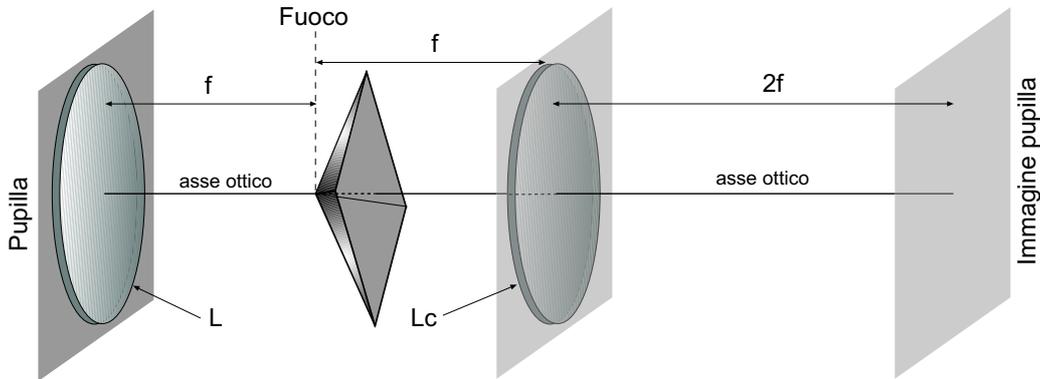


Figura 2.1: La configurazione ottica del sensore a piramide che viene presa in esame in questo paragrafo. In questo caso le quattro immagini della pupilla si formano sul piano a distanza $2f$ da L_C . Nella configurazione di laboratorio le focali delle lenti e le loro posizioni vengono variate in modo tale da permettere l'accoppiamento ottico con il resto del sistema.

zando l'azione della piramide come quella di quattro filtri spaziali (uno per ciascuna faccia superiore del solido) e un tilt di pari ampiezza e differente in direzione per ciascun filtro [30]. La funzionalità della piramide come sensore di fronte d'onda è data dalla sua azione di filtro spaziale [10], mentre i tilt permettono di separare spazialmente le quattro immagini della pupilla prodotte dalla lente di camera; per questo l'attenzione verrà rivolta in particolare all'effetto dei quattro filtri spaziali. In riferimento alla fig.2.2 indichiamo con (η, ξ) le coordinate del piano della pupilla di ingresso del sistema, (x, y) quelle del piano focale e (s, t) del piano immagine di (η, ξ) .

Data la simmetria imposta dalla geometria della piramide, si è scelta una pupilla quadrata al fine di semplificare le operazioni di integrazione; dunque

la funzione pupilla nel piano (η, ξ) è:

$$P_o(\eta, \xi) = \begin{cases} 1 & |\eta| \leq a, \quad |\xi| \leq a \\ 0 & |\eta| > a \\ 0 & |\xi| > a \end{cases} \quad (2.2)$$

mentre la fase del fronte d'onda piano incidente sia data da:

$$\phi_o(\eta, \xi) = k\delta \operatorname{sign}(\eta) = \begin{cases} +k\delta & \eta > 0 \\ 0 & \eta = 0 \\ -k\delta & \eta < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

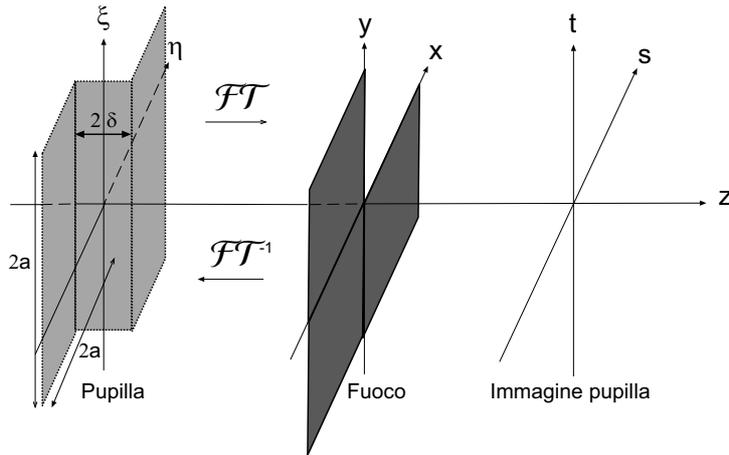


Figura 2.2: Sul piano della pupilla è rappresentata la fase $\phi(\eta, \xi)$ limitata sulla pupilla di ingresso di dimensioni $2a \times 2a$, mentre sul piano del fuoco il filtro spaziale K_1 .

dove $k = 2\pi/\lambda$ ($\lambda =$ lunghezza d'onda) e δ è l'altezza della discontinuità fra le superfici fisiche nell'unità in cui è espressa λ . Il fasore sulla pupilla di ingresso è quindi:

$$U_o(\eta, \xi) = A P_o(\eta, \xi) e^{i\phi(\eta, \xi)} \quad (2.4)$$

essendo A l'ampiezza che sarà da questo momento considerata unitaria. La

propagazione del campo incidente sul piano focale attraverso L , secondo l'ottica di Fourier [18], genera il campo nel piano (x, y) :

$$U_i(x, y) = \frac{e^{ikf} e^{ik(x^2+y^2)/2f}}{i\lambda f} \cdot \int \int U_o(\eta, \xi) e^{-ik(\eta x + \xi y)/f} d\eta d\xi. \quad (2.5)$$

In questa espressione il termine che precede il doppio integrale è un termine di fase di cui e^{ikf} , essendo indipendente da (x, y) , risulta essere di piston, dunque può essere posto pari a 1 senza alcuna perdita di generalità. Il termine $e^{ik(x^2+y^2)/2f}$ rappresenta invece la curvatura sferica della fase sul piano focale. Questo termine può essere trascurato qualora ci si limiti a considerare una regione del piano focale limitata intorno all'asse ottico, tanto limitata che la curvatura della sfera non introduca variazioni di fase significative. Formalmente si può scrivere questa condizione come:

$$\frac{k}{2f}(x^2 + y^2) \ll \pi \quad (2.6)$$

definendo r tale che $r^2 = x^2 + y^2$ e, ricordandosi che $k = 2\pi/\lambda$, si ottiene

$$r^2 \ll \lambda f. \quad (2.7)$$

La regione di piano focale che è di interesse ha le dimensioni dell'ordine della PSF, dunque $r \sim \lambda f/2a = f_{\#}\lambda$ (dove $f_{\#} = f/2a$) e la condizione per poter trascurare il termine sferico diventa:

$$f_{\#}^2 \ll \frac{f}{\lambda}. \quad (2.8)$$

Questa condizione è pienamente soddisfatta per il sistema ottico in esame essendo $f_{\#} \approx 10$, $f \approx 10^{-1}m$ e $\lambda = 632.8nm$.

Esprimendo le lunghezze in unità di $\sqrt{f/k}$ è possibile ora scrivere:

$$\begin{aligned}
U_i(x, y) &= \int \int U_o(\eta, \xi) e^{-i(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi = \\
&= \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} e^{ik\delta \text{sign}(\eta)} e^{-i(\eta x + \xi y)} d\eta d\xi
\end{aligned}$$

Integrando si ottiene l'espressione del campo prima dell'azione di filtro spaziale della piramide:

$$\begin{aligned}
U_i(x, y) &= \frac{4 \sin(aky)}{k^2 x^2 y} \left[x \cos(k\delta) \sin(akx) + \right. \\
&\quad \left. + 2x \text{sign}(kx) \sin^2\left(\frac{akx}{2}\right) \sin(k\delta) \right] \quad (2.9)
\end{aligned}$$

che è quindi il fasore del campo sul piano focale di L quando in pupilla si abbia un fronte d'onda piano con un gradino di fase di altezza 2δ .

I filtri spaziali associati alle facce della piramide sono (fig.2.3):

$$K_1(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0 & x < 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad K_2(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \quad y \geq 0 \\ 0 & x > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$K_3(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \quad y \leq 0 \\ 0 & x < 0 \\ 0 & y > 0 \end{cases} \quad K_4(x, y) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \quad y \leq 0 \\ 0 & x < 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Applicando il coltello $K_i(x, y)$ si modifica il fasore del campo sul piano (x, y) che diventa:

$$U_f^i(x, y) = K_i(x, y) U_i(x, y) \quad (2.12)$$

Grazie alla reversibilità del cammino ottico, contropropagando questo fasore si ottiene il campo che si dovrebbe avere sulla pupilla di ingresso per

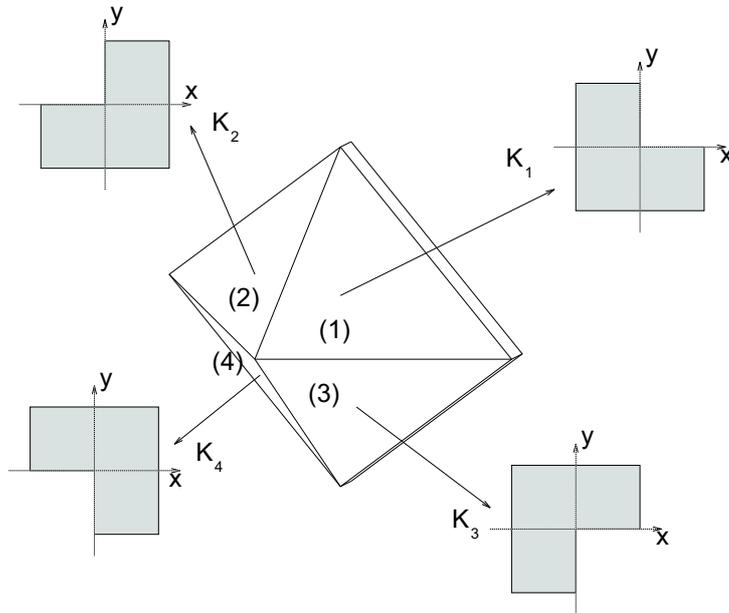


Figura 2.3: I quattro filtri spaziali sul piano focale associati alle quattro facce superiori della piramide.

ottenere proprio $U_f^i(x, y)$ sul piano focale di L . Operando l'antitrasformata di Fourier² si ottiene quindi:

$$U_p^i(\eta, \xi) = \int \int K_i(x, y) U_i(x, y) e^{+i(x\eta+y\xi)} dx dy \quad (2.13)$$

Assumendo ora L_c perfetta ed infinita, poiché è posta a distanza $2f$ dal piano (η, ξ) , si ha che questa lente forma sul piano (s, t) un'immagine di ingrandimento unitario della pupilla di ingresso. Dunque il fasore del campo sull'immagine della pupilla attraverso il coltello K_i sarà proprio:

$$U_p^i(s, t) = U_p^i(\eta, \xi) \quad (2.14)$$

²Nelle stesse approssimazioni già fatte nel caso della propagazione diretta.

Prendendo in esame il caso del filtro K_1 si ha:

$$\begin{aligned}
U_p^1(s, t) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin(aky)}{k^2 x^2 y} \left[x \cos(k\delta) \sin(akx) + \right. \\
&\quad \left. + 2x \operatorname{sign}(kx) \sin^2\left(\frac{akx}{2}\right) \sin(k\delta) \right] dx dy = \\
&= \frac{1}{4k^2} \left\{ \left[i \left(\ln[k^2(a+t)^2] - \ln[(ak-kt)^2] \right) + \pi \left(\operatorname{sign}[k(a-t)] + \operatorname{sign}[k(a+t)] \right) \right] \cdot \right. \\
&\left[i \cos(k\delta) \left(\ln[k^2(a+s)^2] - \ln[(ak-ks)^2] \right) + \pi \operatorname{sign}[k(a+s)] \left(\cos(k\delta) - i \sin(k\delta) \right) + \right. \\
&\left. + \pi \operatorname{sign}[k(a-s)] \left(\cos(k\delta) + i \sin(k\delta) \right) - 4 \ln(k) \operatorname{sign}(k\delta) - 2 \ln(s^2) \sin(k\delta) + \sin(k\delta) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\ln[k^2(a+s)^2] - \ln[(ak-ks)^2] \right) + 2i\pi \sin(ks) \sin(k\delta) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Come apparirà evidente sia nelle simulazioni numeriche che nei dati sperimentali, il segnale generato dalla discontinuità è massimo nel piano dell'immagine della pupilla proprio dove è collocato spazialmente il gradino in ingresso. Nei punti di coordinate $(s, t = 0)$ l'espressione del campo si semplifica e diventa:

$$\begin{aligned}
U_p^1(s, 0) &= \frac{\pi}{2k} \left\{ \cos(k\delta) \cdot \left(2\pi + i \log[k^2(a+s)^2] - i \log[k^2(a-s)^2] \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sin(k\delta) \cdot \left(2i\pi - 4 \log(k) - i2 \log(s^2) + \log[k^2(a+s)^2] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \log[k^2(a-s)^2] \right) \right\} = \\
&= \frac{\pi}{2k} \left\{ \cos(k\delta) \cdot \left(2\pi + i \log \left[\frac{(a+s)^2}{(a-s)^2} \right] \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sin(k\delta) \cdot \left(2i\pi - \log \left[\frac{(a+s)^2(a-s)^2}{s^4} \right] \right) \right\}
\end{aligned}$$

Vicino al gradino $|s| \rightarrow 0$, quindi si pone $s = \epsilon$ con $\epsilon/a \ll 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \log \left[\frac{(a + \epsilon)^2}{(a - \epsilon)^2} \right] &\simeq 0 \\ \log \left[\frac{(a + \epsilon)^2 (a - \epsilon)^2}{\epsilon^4} \right] &\simeq \log \left[\frac{a}{\epsilon} \right]^4 \end{aligned}$$

che permette di scrivere

$$U_p^1(\epsilon, 0) = \frac{\pi}{2k} \left\{ 2\pi \cos(k\delta) + \sin(k\delta) \cdot \left(2i\pi - \log \left[\frac{a}{\epsilon} \right]^4 \right) \right\}.$$

L'intensità dell'immagine della pupilla generata attraverso il filtro K_1^3 vicino all'asse ottico è quindi:

$$\begin{aligned} I_1(\epsilon, 0) &= \left| U_p^1(\epsilon, 0) \right|^2 = \\ &= \frac{\pi^4}{k^2} \left\{ \left[\cos(k\delta) + \frac{1}{\pi} \log \left[\frac{a}{\epsilon} \right]^2 \sin(k\delta) \right]^2 + \left[\sin(k\delta) + \frac{1}{2\pi} \cos(k\delta) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Per ottenere le intensità prodotte attraverso K_2, K_3, K_4 è sufficiente considerare la particolare simmetria del problema (vedi fig.2.2): l'immagine prodotta da K_4 non può essere differente da quella prodotta da K_1 se non per il segno delle coordinate spaziali e di δ . Applicando le simmetrie

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad \delta \rightarrow -\delta \quad \text{per } I_2 \\ x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad \delta \rightarrow \delta \quad \text{per } I_3 \\ x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow -y, \quad \delta \rightarrow -\delta \quad \text{per } I_4 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

³Riportandoci al caso della piramide, dove i filtri spaziali vengono applicati contemporaneamente, si devono considerare anche i contributi al campo generati dai restanti tre filtri. Il tilt introdotto dalle facce della piramide, come già detto, separa le quattro immagini prodotte e calcolare l'intensità dell'immagine, considerando il contributo di un solo filtro, equivale a supporre tale separazione sufficiente a rendere trascurabile contributi delle altre tre facce.

si ottiene:

$$\begin{aligned}
 I_4(\epsilon, 0) &= \frac{\pi^4}{k^2} \left\{ \left[\cos(k\delta) - \frac{1}{\pi} \log \left[\frac{a}{\epsilon} \right]^2 \sin(k\delta) \right]^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\sin(k\delta) + \frac{1}{2\pi} \cos(k\delta) \right]^2 \right\} \\
 I_3(\epsilon, 0) &= I_1(\epsilon, 0) \\
 I_2(\epsilon, 0) &= I_4(\epsilon, 0).
 \end{aligned}$$

Calcolando il segnale S del sensore a piramide lungo la direzione s del piano (s, t) si ha, a meno di una costante moltiplicativa:

$$\begin{aligned}
 S(\delta) &= (I_1 + I_3) - (I_4 + I_2) = 2(I_1 - I_4) \\
 &= 2 \frac{\pi^4}{k^2} \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left[\frac{a}{\epsilon} \right]^4 \sin(2k\delta) + 16\pi^3 \sin(2k\delta) \right\} = \\
 &= 2 \frac{\pi^4}{k^2} \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left[\frac{a}{\epsilon} \right]^4 + 16\pi^3 \right\} \cdot \sin(2k\delta) \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione $[\cos(\alpha) + A \sin(\alpha)]^2 - [\cos(\alpha) - A \sin(\alpha)]^2 = 2A \sin(2\alpha)$.

Si è quindi dimostrato che il segnale prodotto dal sensore a piramide⁴ per una discontinuità di fronte d'onda con differenza di fase $\Delta\phi = 2k\delta$ ha la dipendenza:

$$S(\Delta\phi) = \text{cost} \cdot \sin(\Delta\phi). \quad (2.17)$$

⁴E' stata fatta l'approssimazione $\epsilon \ll a$, dunque il risultato è valido per un intorno spaziale centrato sul gradino e di raggio molto minore delle dimensioni lineari della pupilla. Tuttavia, sia dalle simulazioni che dal riscontro sperimentale, è evidente come il segnale sia effettivamente trascurabile lontano dalla discontinuità, questo permette di svincolare il risultato dall'approssimazione fatta essendo questa verificata in generale.

Si è ottenuto così un riscontro formale di quanto ottenuto numericamente da Esposito nel 2001 [11]. La relazione sinusoidale fra pistone differenziale e segnale del sensore a piramide è alla base del suo utilizzo per la rivelazione delle discontinuità di fronte d'onda in quanto, quando valga l'approssimazione $\sin(\Delta\phi) \simeq \Delta\phi$, risulta lineare, permettendo il suo utilizzo come sensore in un sistema reazionato.

La relazione sinusoidale genera d'altronde un'ambiguità di π rad sulla fase che è stata risolta nel caso sperimentale come descritto nel paragrafo 4.3.2.

2.2 Simulazione numerica.

In preparazione al test sperimentale è stato elaborato un codice numerico in IDL (*Interactive Data Language*) della *Research Systems Inc.*, che simulasse le condizioni della misura i cui risultati potessero essere confrontati qualitativamente con i risultati sperimentali.

Rispetto alla trattazione analitica, la simulazione numerica ha permesso di porsi in condizioni più vicine a quelle reali: si è lavorato con una pupilla circolare e non più quadrata, ma soprattutto è stato possibile applicare uno schermo di fase per simulare la piramide, potendo tener conto, quindi, dell'interferenza dei campi generati da ogni singola faccia su tutte e quattro le pupille; inoltre è stato possibile introdurre un tilt verticale arbitrario così da poter simulare le condizioni sperimentali (fig.4.1). Di contro il codice numerico impone una discretizzazione sia dei campi, sia della loro propagazione con l'uso dell'algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*).

2.2.1 Descrizione del codice.

La logica dell'algoritmo riproduce la stessa configurazione adottata per la trattazione analitica del sistema rappresentata in fig.2.1.

Inizialmente si definiscono due segmenti quadrati adiacenti di pari lato, che rappresentano le porzioni di fronte d'onda riflesse da due specchi piani adiacenti. Su di essi si definisce il fasore di campo elettrico come in eq.2.4; ad un elemento vengono quindi applicati pistone e tilt desiderati. Si definisce una circonferenza con diametro coincidente con il lato di separazione dei due elementi e di dimensione d elementi; si pone nullo il campo all'esterno di questa.

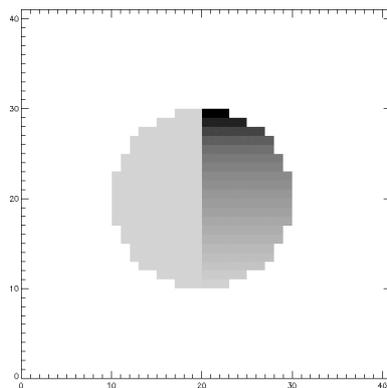


Figura 2.4: Rappresentazione grafica della fase del campo elettrico definito sulla pupilla di ingresso. I toni di grigio rappresentano valori crescenti della fase. Nel caso rappresentato fra le due superfici è presente un pistone differenziale medio pari a π rad e un tilt relativo di 4π picco-valle, introdotto per riprodurre le condizioni sperimentali (fig.4.1).

Applicando l'algoritmo di *FFT* si propaga questo campo sul piano focale (fig.2.5).

Come già accennato, l'azione della piramide viene riprodotta inserendo sul

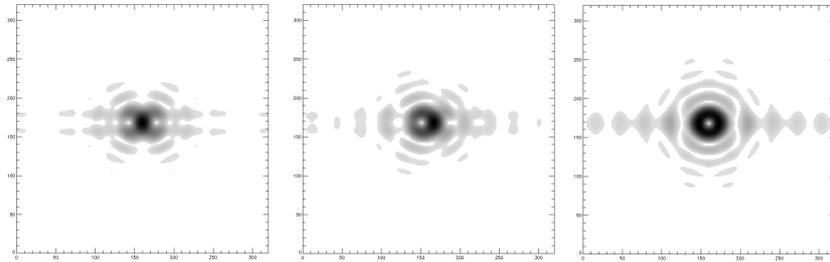


Figura 2.5: Distribuzioni di intensità sul piano focale prima dell'applicazione della maschera di fase che simula la piramide. A sinistra il pistone differenziale medio fra i segmenti è nullo, al centro pari a $\pi/2 \text{ rad}$, a destra $\pi \text{ rad}$. In tutti e tre i casi è presente un tilt verticale relativo pari a $4\pi \text{ rad}$.

piano focale uno schermo di fase tale che riproduca la variazione di cammino ottico introdotto dall'attraversamento del solido, in questo modo otterremo contemporaneamente entrambi gli effetti della piramide: filtraggio spaziale introdotto dalla derivata discontinua sugli spigoli e traslazione delle immagini generate dalla lente di camera a causa della differente direzione del tilt presente sulle quattro facce.

Per definire la maschera di fase da introdurre si prenda in esame la differenza di cammino ottico introdotta dalla piramide. La superficie della faccia 1 (fig.2.3), ad esempio, può essere rappresentata dalla funzione $f(x, y) = h - \tan(\alpha)(x + y)$ (fig.2.6) dove h è l'altezza della piramide, mentre α è l'angolo che la faccia forma con la base. Dunque la differenza di cammino ottico introdotta dalla piramide per un raggio che attraversa la faccia in (x, y) è $\Delta c = (n_p - 1)f(x, y) = (n_p - 1)h - (n_p - 1)\tan(\alpha)(x + y)$ dove n_p è l'indice di rifrazione della piramide, mentre per l'aria si è considerato 1 (fig.2.6). Si suppone inoltre che il raggio si propaghi normalmente alla base della piramide. Il termine $(n_p - 1)h$, essendo indipendente dalle coordinate

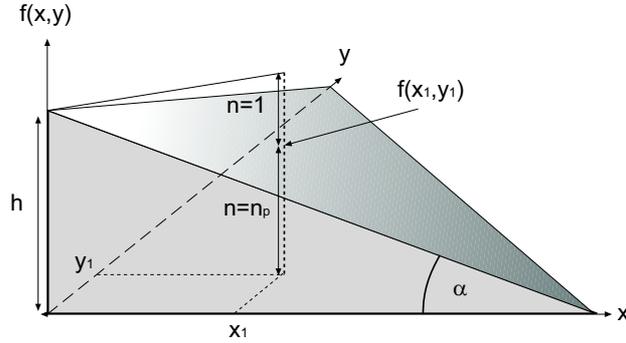


Figura 2.6: La faccia della piramide occupante il primo quadrante del piano focale. Il cammino ottico lungo l'asse della piramide è pari a $h n_p$, mentre quello analogo nel punto (x_1, y_1) è $1 [h - f(x_1, y_1)] + n_p f(x_1, y_1)$. La differenza fra i due cammini espressa in lunghezze d'onda e moltiplicata per 2π rappresenta il ritardo di fase introdotto.

spaziali, introduce una differenza di fase comune e può essere trascurato: $\Delta c = (1 - n_p) \tan(\alpha)(x + y)$. La differenza di fase per le altre facce si ottiene semplicemente permutando i segni di x e y . Dunque il ritardo di fase introdotto dalla piramide è:

$$\Delta\psi = \Delta c \frac{2\pi}{\lambda} = \begin{cases} \frac{2\pi(1-n_p)\tan(\alpha)}{\lambda} \cdot (x + y) & x > 0 \quad y > 0 \\ \frac{2\pi(1-n_p)\tan(\alpha)}{\lambda} \cdot (-x + y) & x < 0 \quad y > 0 \\ \frac{2\pi(1-n_p)\tan(\alpha)}{\lambda} \cdot (x - y) & x > 0 \quad y < 0 \\ \frac{2\pi(1-n_p)\tan(\alpha)}{\lambda} \cdot (-x - y) & x < 0 \quad y < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Applicato questo ritardo di fase al campo sul piano focale, si opera una antitrasformata (FFT^{-1}) per ottenere le quattro immagini della pupilla (fig.2.7).

Calcolando il modulo quadro delle ampiezze si ottengono le intensità delle

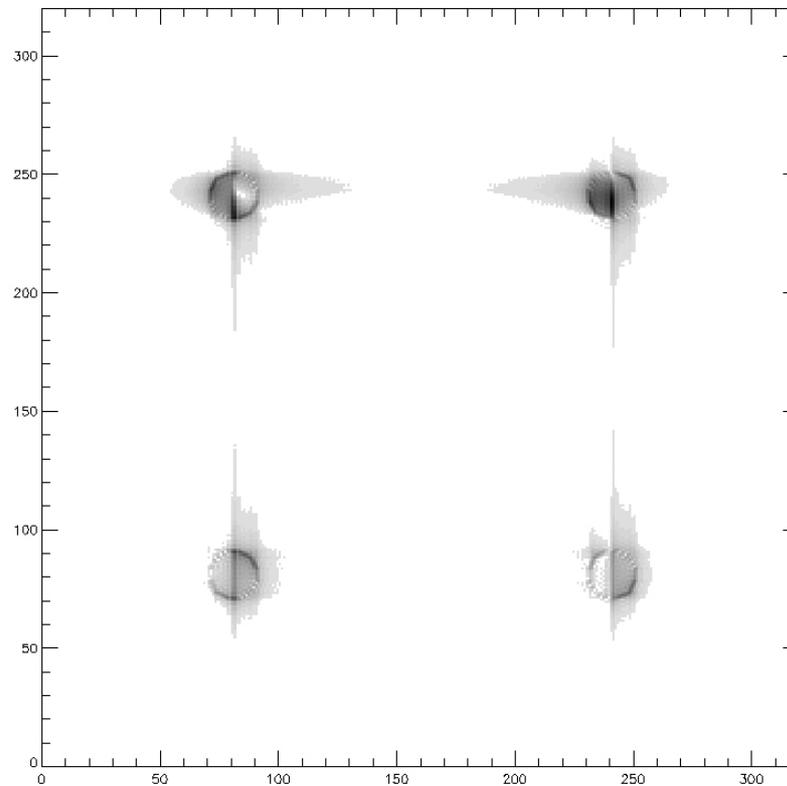


Figura 2.7: Intensità sul piano del rivelatore. Sono presenti le quattro immagini della pupilla equidistanziate. Il bianco corrisponde ad intensità nulla, i toni di grigio intensità crescente. La maggiore luminosità delle semipupille superiori sinistre è dovuto al tilt verticale, mentre appare già chiaramente al centro l'effetto associato alla discontinuità fra i due elementi.

pupille sul piano del rivelatore (fig.2.7), le quali, combinate come nell'eq.3.1, danno il segnale del sensore (fig.2.8).

2.2.2 Risultati.

La figura 2.7 riporta l'immagine della pupilla di ingresso composta da quattro pupille ottenuta dopo la piramide. Come primo effetto si nota la presenza

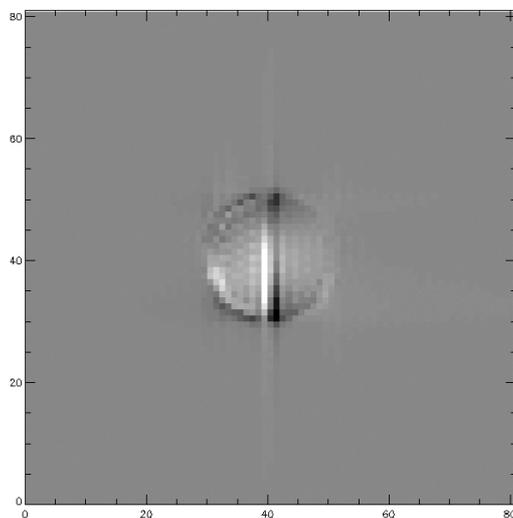


Figura 2.8: Rappresentazione grafica dei segnali S_x . Il segnale nullo è rappresentato dal tono di grigio prevalente all'esterno della pupilla. Nel caso rappresentato il pistone differenziale medio fra i segmenti è pari a $\pi/2 \text{ rad}$, mentre il tilt relativo $4\pi \text{ rad}$.

di intensità non nulla anche esternamente al contorno delle quattro immagini della pupilla. Questo è dovuto proprio ai contributi di interferenza che si hanno quando si calcolino le intensità tenendo conto dei campi propagati attraverso tutte e quattro le facce della piramide e non più applicando separatamente i coltelli sul piano focale. All'interno delle pupille è importante osservare la maggiore intensità ai bordi delle stesse, dovuta ad un noto effetto diffratto [29] che risulterà rilevante nella sensibilità del sensore, come verrà discusso in par.4.2.2.

Passando all'analisi dei segnali in pupilla (fig.2.8) è evidente la presenza del segnale dato dal pistone differenziale localizzato in corrispondenza della discontinuità in pupilla, riscontro che valida l'ipotesi fatta nel paragrafo precedente affrontando la trattazione formale.

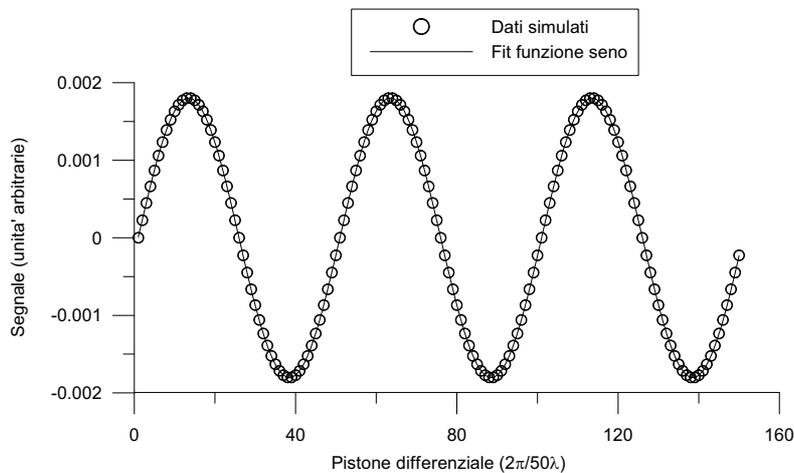


Figura 2.9: Andamento del segnale su una sottoapertura della pupilla in corrispondenza della discontinuità al variare dell'ampiezza di questa. Il pistone differenziale varia a passi di $\frac{2\pi}{\lambda 50} rad$. E' stato compiuto un *fit* della funzione seno sui dati ottenuti attraverso la simulazione numerica.

Per verificare la dipendenza del segnale dal pistone differenziale si riporta in grafico il valore del segnale su una sottoapertura spazialmente localizzata sulla discontinuità di fase, al variare del pistone a intervalli regolari (fig.2.9). L'ottimo accordo dei dati simulati con la funzione seno valida il risultato dello sviluppo analitico (eq.2.17).

Ottenuto questo primo risultato utile, sono attualmente in elaborazione ulteriori sviluppi della simulazione numerica. Saranno introdotti la modulazione di tilt e più discontinuità sul fronte d'onda, affinché i risultati possano essere raffrontati con quelli dei prossimi sviluppi sperimentali (par.5.1).

Capitolo 3

Apparato sperimentale.

3.1 Il sistema di misura.

L'apparato sperimentale utilizzato per lo studio delle prestazioni del sensore a piramide nella misura di errori di pistone (fig.3.1) consiste di tre elementi principali: il primo è un sistema opto-meccanico ideato e realizzato *ad hoc* per l'esperimento (verrà chiamato *generatore di pistone*) che introduce una discontinuità di ampiezza variabile sul fronte d'onda incidente; il secondo è il sensore di fronte d'onda a piramide (SP); il terzo un interferometro che permette di misurare indipendentemente l'aberrazione introdotta.

Il fascio viene generato dal laser He-Ne ($\lambda = 632.8nm$) dell'interferometro; una volta collimato, questo incide sul generatore di pistone e viene riflesso verso la sorgente; infine, prima di ritornare all'ingresso dell'interferometro, attraversa un divisore di fascio che ne riflette metà intensità all'ingresso del sensore a piramide.

Con questa configurazione è quindi possibile ottenere la misura dell'aberrazione introdotta contemporaneamente sia col SP, sia con l'interferometro,

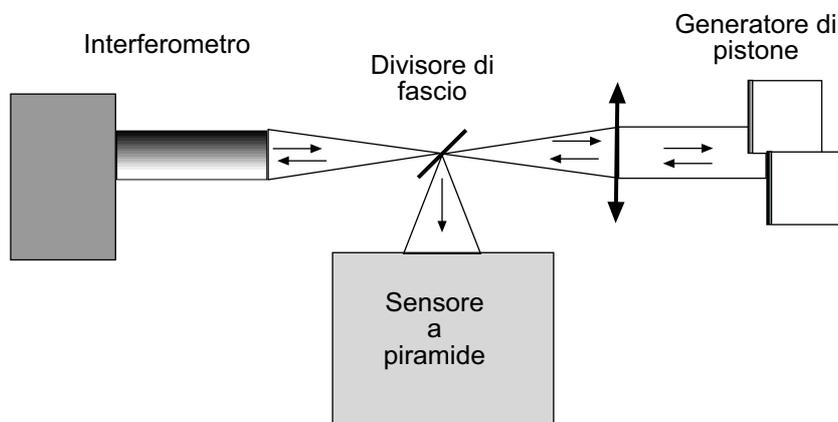


Figura 3.1: Configurazione del sistema di misura. Il divisore di fascio è realizzato con una pellicola semiriflettente, che ad ogni attraversamento trasmette e riflette il 50% dell'intensità incidente.

come schematizzato in fig.3.1.

3.2 Il generatore di pistone.

Questo elemento ha lo scopo introdurre una discontinuità del fronte d'onda equivalente a quella che si produce fra due elementi adiacenti di uno specchio segmentato. Tale sistema è costituito da due cubi di silice (lato = 15mm) alluminati su una faccia (fig.3.2). Un diaframma di 8mm di diametro viene posto sul fascio collimato sostanzialmente centrato sulla linea di contatto dei due cubi, lasciando che il fronte d'onda incida sulla faccia alluminata di entrambi i cubi.

L'esperimento ha la finalità di misurare il pistone differenziale dei segmenti, dunque è conveniente minimizzare tip e tilt relativi dei due segmenti i cui segnali, nel sensore a piramide, andrebbero a sommarsi algebricamente al segnale di pistone, diminuendo così la sensibilità della misura. Le princi-

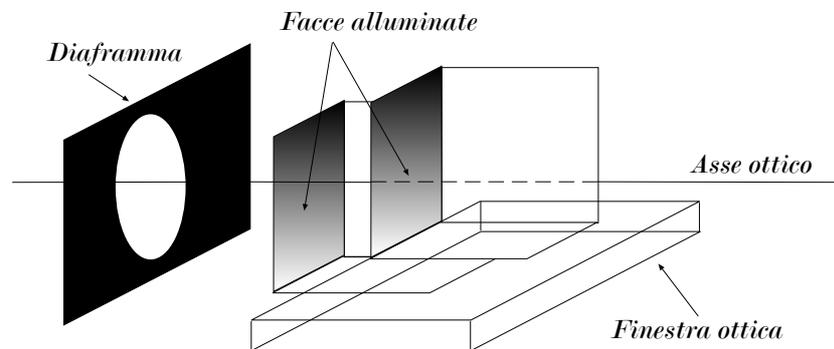


Figura 3.2: Posizionamento meccanico delle facce riflettenti dei cubi rispetto all'asse ottico. Il diaframma costituisce la pupilla di ingresso del sistema.

pali specifiche dei cubi e alcuni accorgimenti utili al corretto montaggio del generatore di pistone sono:

- ogni cubo ha facce lavorate con planarità entro $\lambda/10$ ed ortogonali fra loro entro $10''$ ($\sim \lambda/10$);
- entrambi sono stati adagiati su di una lamina piano parallela lavorata otticamente, affinché la loro faccia inferiore venisse riferita ad un medesimo piano fisico;
- un cubo è fissato al supporto, mentre l'altro è sottoposto ad una forza meccanica tale che imponga il contatto fra le facce adiacenti (oltre che con la lamina), cosicché sia garantito il parallelismo anche rispetto all'asse verticale di rotazione (fig.3.3A).

In questo modo l'unico grado di libertà lasciato al sistema è la traslazione di un cubo rispetto all'altro nella direzione dell'asse ottico del sistema. Questo movimento viene controllato tramite un attuatore azionato da un motore passo-passo (fig.3.3B).

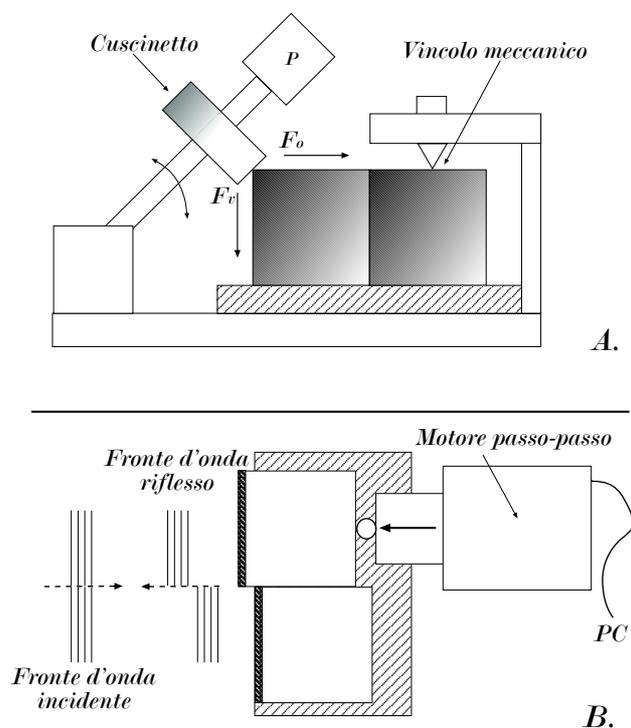


Figura 3.3: In A è schematizzata la sezione verticale del generatore di pistone, il sistema meccanico permette di scomporre la forza peso di P in due componenti: F_v che riferisce la base del cubo di sinistra alla finestra ottica e F_o che garantisce il contatto fra le facce adiacenti dei due cubi. Il cuscinetto permette di mantenere i riferimenti anche durante il moto del cubetto di sinistra causato dall'azione del motore visibile in B.

In questo modo è possibile introdurre un pistone variabile fra le porzioni di fronte d'onda riflesse dalle due differenti superfici.

3.3 Il sensore di fronte d'onda.

Il sensore usato è quello progettato e attualmente in sviluppo per il sistema di ottica adattiva del *Large Binocular Telescope* (LBT)[13] [14].

Seguendo il cammino ottico (e in riferimento a fig.3.5) il sensore è com-

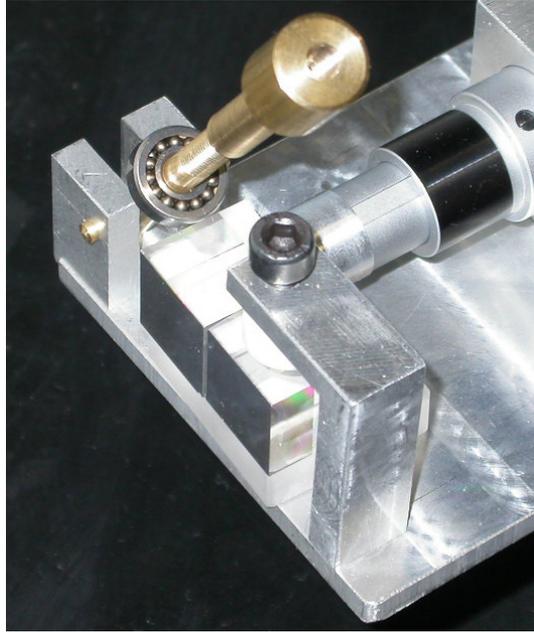


Figura 3.4: Foto del generatore di pistone ideato e realizzato per l'esperimento.

posto da:

1. **Tripletto acromatico**; il fascio proveniente dallo specchio terziario di LBT ha un'apertura $f_{\#} = 15$, questa lente permette la conversione a $f_{\#} = 45$ essendo questa l'apertura del fascio per la quale è ottimizzata la piramide.

Elemento	focale mm	diametro mm
Tripletto	120	30
Lente di camera	35.7	10

Tabella 3.1: Focale e diametri degli elementi del SP con potere ottico.

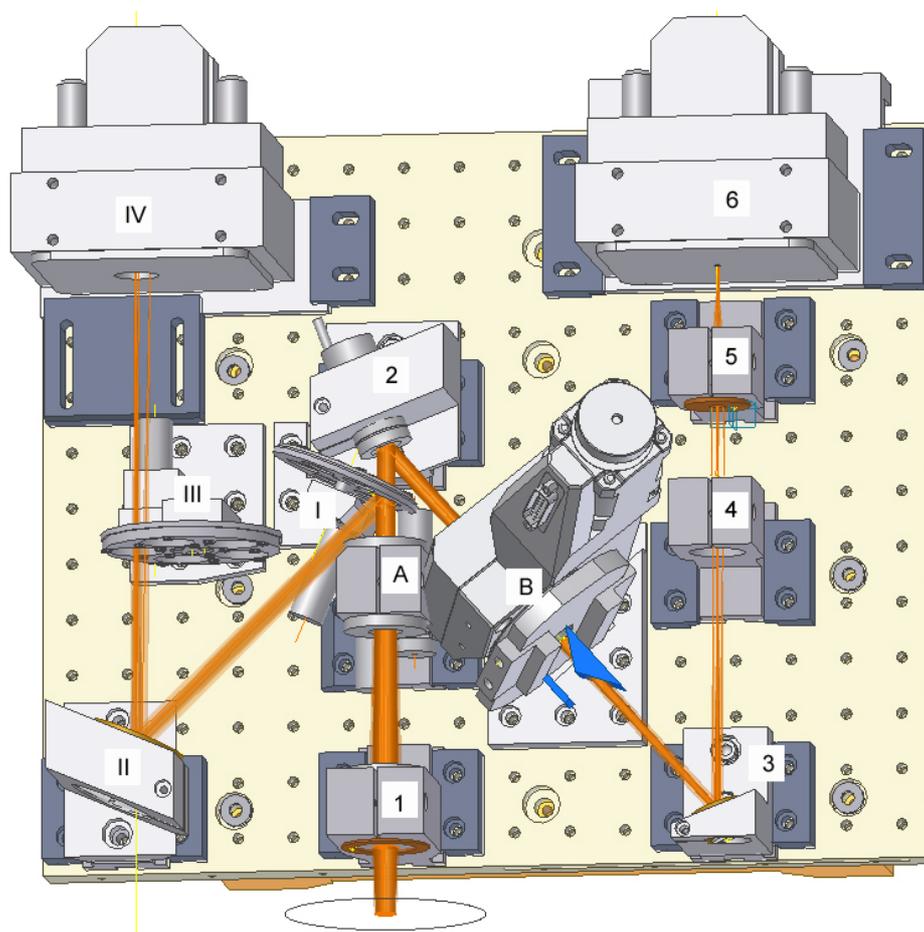


Figura 3.5: Il sensore di fronte d'onda a piramide nella configurazione finale per il sistema di ottica adattiva di LBT. Con i numeri arabi sono indicati gli elementi utilizzati nelle misure. Gli elementi A (correttore di dispersione atmosferica) e B (rotatore di pupilla) sono stati rimossi dal cammino ottico durante l'esperimento. Con i numeri romani sono descritti gli elementi del ramo del visore tecnico utilizzato per registrare le immagini sul piano focale del sistema.

2. **Specchio di tip-tilt**; attuato piezoelettricamente oscilla attorno ai due assi del piano dello specchio. Utilizzando in ingresso due tensioni

sinusoidali sfasate di $\pi/2$, è possibile far sì che la normale dello specchio descriva un cono attorno all'asse ottico del sistema alla frequenza delle sinusoidi considerate. E' posto nell'immagine della pupilla del sistema, cosicché tip e tilt introdotti si traducano in traslazioni della PSF nel piano focale senza produrre movimenti della pupilla di uscita nel sistema.

Physik Instrumente	modello	S-330
TT range	$2mrad$	sulla superficie
Freq. di risonanza	$2.4kHz$	
Risoluzione	$0.1\mu rad$	

Tabella 3.2: Alcuni dati tecnici del dispositivo di tip-tilt.

3. **Specchio di deviazione;** consente di piegare il fascio e rendere tutto il sensore più compatto.

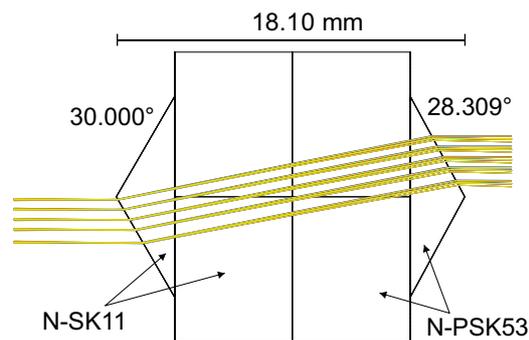


Figura 3.6: La doppia piramide usata nelle misure vista parallelamente all'asse ottico. Il tracciamento di raggi a diverse lunghezza d'onda ottenuto con *Zemax* evidenzia come la scelta dei vetri indicati permetta a questo elemento di essere cromaticamente corretto.

4. **Piramide a base quadrata**; in questo sensore viene utilizzata una doppia piramide come rappresentato in fig.3.6. L'efficacia della coppia di piramidi è pari a quella di una piramide singola di angolo circa uguale alla differenza degli angoli della coppia [31]. La scelta di avere una piramide doppia porta due vantaggi poiché si guadagnano due parametri liberi: un indice di rifrazione e la somma degli angoli. Quindi è possibile utilizzare il primo per correggere cromaticamente l'elemento, il secondo per aumentare gli angoli delle singole piramidi in modo da migliorarne le caratteristiche costruttive a vantaggio della qualità ottica¹.

5. **Lente di camera**; per ognuno dei quattro fasci uscenti dalla piramide crea un'immagine della pupilla sul sensore di immagine.

6. **Sensore CCD** prodotto dalla *Marconi Applied Technologies* modello **CCD39 -02**; presenta 80×80 *pixels* di $24 \mu m$ di lato suddivisi in quattro quadranti per un'area complessiva di $1.92 \times 1.92 mm$. Le immagini delle quattro pupille vengono formate ciascuna su uno dei quadranti del rivelatore (vedi fig.3.7). I valori dei *pixels* vengono trasmessi all'unità logica (BCU) per il calcolo dei segnali. Ciascuna delle pupille occupa una circonferenza del diametro di 30 *pixels*, ne risulta un campionamento su circa 706 sottoaperture. Il rivelatore CCD adottato è stato

¹La caratteristica più critica di una piramide è la dimensione degli spigoli che separano le quattro facce superiori del solido. Lavorare otticamente le facce di una piramide con un angolo di pochi gradi porta ad avere degli spigoli con larghezza non trascurabile rispetto alle dimensioni della PSF, mentre per angoli intorno ai 30° è possibile ottenere delle larghezze di spigolo di un ordine di grandezza inferiori alle dimensioni della PSF del sistema che nel caso del telescopio LBT nel piano focale del sensore risulta di $\sim 30 \mu m$.

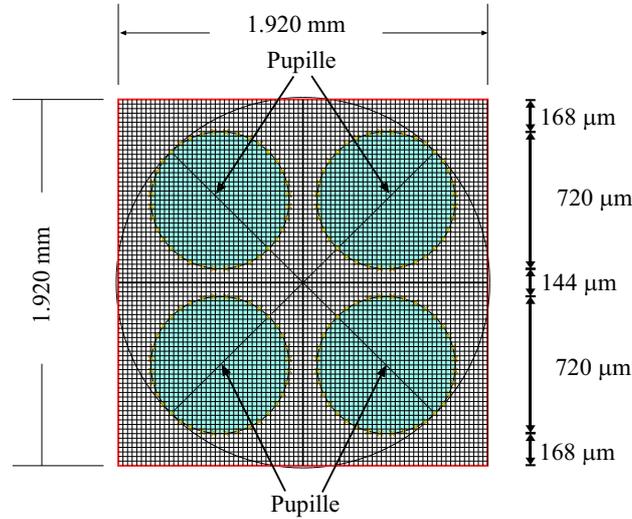


Figura 3.7: Il piano del sensore CCD suddiviso in 80X80 *pixels*. Le circonferenze rappresentano le quattro immagini della pupilla generate dalla lente di camera.

scelto per la sua elevata frequenza di lettura² ottenuta unitamente al basso rumore di lettura ed alla sua elevata dinamica (vedi tab.3.3).

RON	$3e^-/pix$ rms	a 20kHz e 243K
Dinamica	14bit	
RO freq	fino a 2.5Mpix/s	
QE	90%	a 500nm
Area attiva	100%	

Tabella 3.3: Alcune caratteristiche tecniche del sensore CCD. Tutti i valori riportati sono dichiarati dal costruttore.

La **Basic Computation Unit (BCU)** è l'unità elettronica che, leggendo

²L'alta velocità di lettura è indispensabile poiché il sistema adattivo di LBT deve raggiungere una frequenza di operazione di circa 1kHz in condizione di sorgenti brillanti di $m = 8 \div 10$.

le immagini dal CCD, calcola i segnali del sensore³. Il processo effettuato in questa unità è in breve il seguente. I valori dei *pixels* dei quattro quadranti arrivano alla BCU dall'elettronica di controllo del CCD come segnali digitali che indicheremo con $P_i(j)$. A questi valori viene sottratto un valore di *buio* $d_i(j)$ acquisito in precedenza. In queste espressioni $i = 1, 2, 3, 4$ è indice dei quadranti, mentre j indice della sottoapertura sulla pupilla. Per ogni sottoapertura j si hanno 4 valori P_i e i 2 segnali del sensore vengono calcolati da questi secondo $\widehat{S}_x(j)$ e $\widehat{S}_y(j)$:

$$\begin{aligned}\widehat{S}_x(j) &= \frac{[P_1(j) - d_1(j) + P_3(j) - d_3(j)] - [P_2(j) - d_2(j) + P_4(j) - d_4(j)]}{\overline{P}} \quad (3.1) \\ \widehat{S}_y(j) &= \frac{[P_1(j) - d_1(j) + P_2(j) - d_2(j)] - [P_3(j) - d_3(j) + P_4(j) - d_4(j)]}{\overline{P}},\end{aligned}$$

dove $\overline{P} = (\sum_{i,j}[P_i(j) - d_i(j)])/4n_{pup}$ è l'intensità media dei *pixels* in pupilla, avendo indicato con n_{pup} il numero di sottoaperture j presenti in pupilla, ovvero il numero di *pixels* su ciascuna delle 4 immagini della pupilla sul CCD e dunque. A questi segnali vengono sottratti dei valori di zero acquisiti ponendo in pupilla una superficie riflettente piana di riferimento e si ottengono quindi i valori:

$$\begin{aligned}S_x(j) &= \widehat{S}_x(j) - S_{xo}(j) \\ S_y(j) &= \widehat{S}_y(j) - S_{yo}(j)\end{aligned} \quad (3.2)$$

Come si nota in fig.3.5 fra il tripletto (1) e lo specchio di tip-tilt (2) è inserita una ruota portafiltri (I) con un diore di fascio che genera il ramo

³Nella configurazione di ottica adattiva svolge anche il compito ricostruire numericamente il fronte d'onda, calcolare ed inviare i valori di correzione agli attuatori dello specchio deformabile; queste funzioni non sono però state utilizzate in questa configurazione.

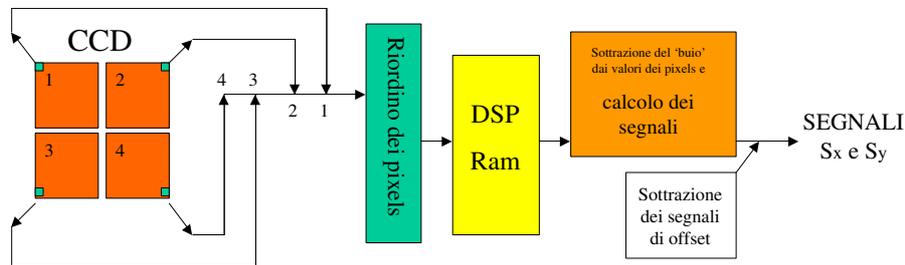


Figura 3.8: Diagramma della sequenza di elaborazione operata dalla *Basic Computation Unit*.

ottico del visore tecnico⁴. Questo ramo non è essenziale per il funzionamento del sensore di fronte d'onda, ma ha consentito di ottenere immagini del piano focale del sistema durante le misure.

3.4 L'interferometro.

L'interferometro usato è il modello μ Phase HR prodotto dalla *Fisba Optik*. Questo strumento ha una configurazione di Twyman-Green (fig.3.9) e compie le misure adottando la tecnica dello scorrimento di frangia. Le immagini dell'interferogramma sono rivelate da una camera di 1024×1020 *pixels*.

La sua scelta è stata dettata dalle dimensioni estremamente compatte e dalla possibilità di poter operare in qualsiasi orientazione rispetto al suolo, caratteristiche, queste, indispensabili per il suo utilizzo a bordo di LBT.

Le misure elaborate tramite il *software* dedicato dell'interferometro, uti-

⁴Il ramo è composto da uno specchio di deviazione (II), una ruotaportafiltri (III) per eventuali filtri scientifici o grismi ed il CCD a grande campo (IV).

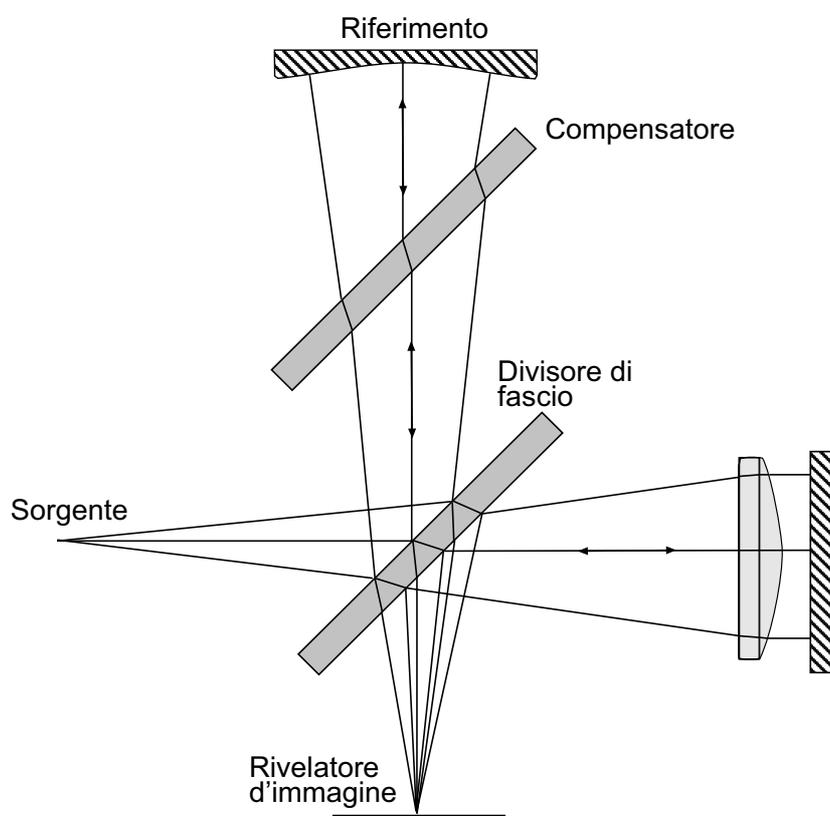


Figura 3.9: Schema ottico di un interferometro di Twyman-Green tipo Williams. E' una configurazione derivante dall'interferometro di Michelson. Questa variante, grazie ad uno specchio concavo, permette di non usare collimatori di grandi dimensioni rendendo notevolmente più compatte le dimensioni dello strumento.

lizzando lo scorrimento di frangia, sono insensibili alle variazioni di pistone del fronte d'onda e, per questo, non sono mai state utilizzate nel corso dell'esperimento. Le misure utilizzate in 4.3.1 sono ottenute direttamente dalle immagini dell'interferogramma prodotto sulla camera CCD dello strumento, senza ulteriori elaborazioni.

Capitolo 4

Misure sperimentali.

4.1 Pistone differenziale e segnale del SP.

La prima sessione di misure è finalizzata alla verifica sperimentale dell'esistenza del segnale del SP generato da una discontinuità del fronte d'onda ed a confrontarne l'andamento reale con quelli attesi dal calcolo analitico (2.1) e dalle simulazioni (2.2, [11]).

In fig.4.1 si può osservare come il segnale interessi principalmente la colonna di elementi del sensore in corrispondenza della discontinuità. Questi non presentano, tuttavia, intensità simili a causa del tilt verticale relativo residuo che varia il gradino di fase lungo la coordinata verticale y con un andamento $\Delta\phi(y) = \phi_0 + ky$; in questo modo il segnale S_x risulta modulato anche spazialmente con andamento sinusoidale.

Azionando il generatore di pistone si può osservare come i segnali del SP varino sensibilmente soltanto nella colonna di elementi in corrispondenza del gradino di fase (fig.4.2).

Per ottenere la misura del segnale al variare di $\Delta\phi$ (fase del pistone dif-

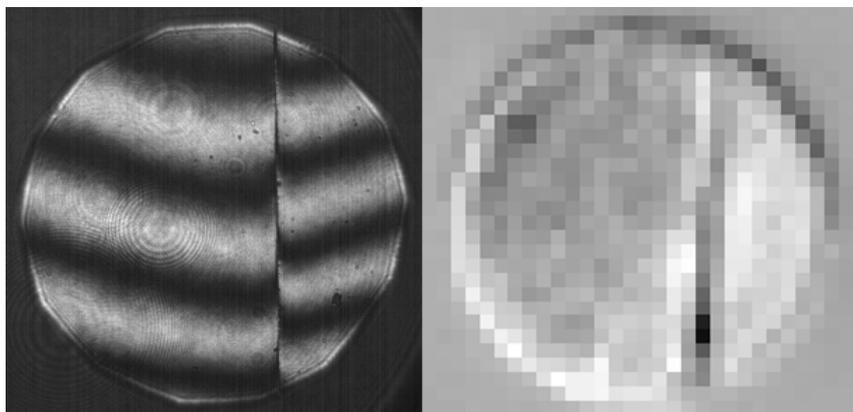


Figura 4.1: **Sinistra:** immagine prodotta dall'interferometro FISBA (3.4); è evidente la presenza della discontinuità e la differente frequenza spaziale delle frange di interferenza rivela il residuo tilt verticale relativo fra le due superfici. **Destra:** i segnali del SP su tutta l'immagine della pupilla.

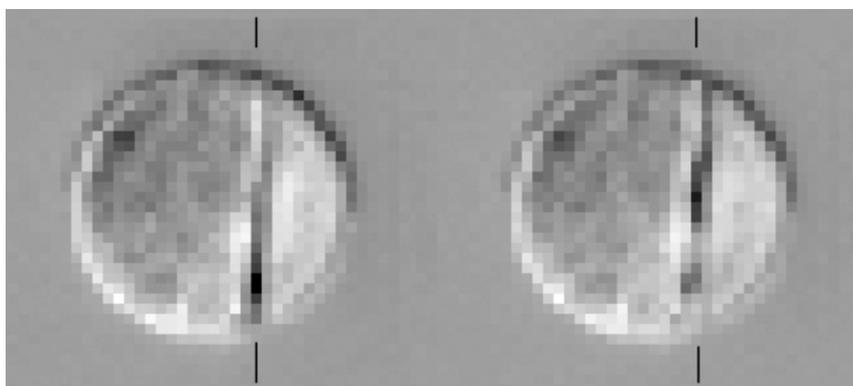


Figura 4.2: Rappresentazione grafica dei segnali S_x prima (sinistra) e dopo (destra) aver variato il pistone differenziale. Si noti come il segnale vari apprezzabilmente soltanto nella regione che, sul piano della pupilla, corrisponde alla discontinuità (colonna di elementi indicati dai riferimenti ai bordi).

ferenziale) col SP è stata effettuata una sequenza di circa 2000 acquisizioni ad una frequenza di $150Hz$, durante la quale è stato attivato il motore del gen-

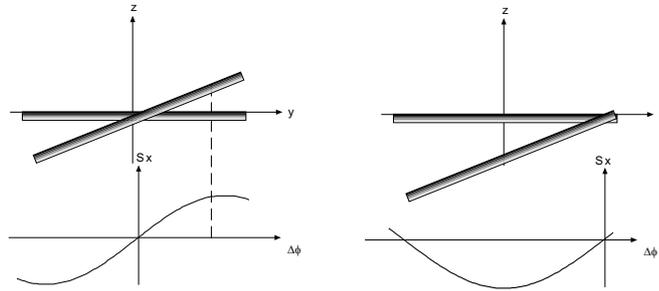


Figura 4.3: **In alto:** Schematizzazione della posizione delle due superfici riflettenti nei casi di fig.4.2, il tilt relativo rimane costante e varia il pistone differenziale. **Sotto:** andamento del segnale in funzione di $\Delta\phi$ e della coordinata spaziale y nei due rispettivi casi.

eratore di pistone (3.2), in modo tale che $\Delta\phi$ variasse almeno su un periodo. Riportando in grafico i valori di S_x calcolati su una singola sottoapertura localizzata in corrispondenza della discontinuità, si ottiene un andamento come in fig.4.4.

L'evoluzione temporale del segnale mostra l'andamento sinusoidale atteso nel periodo centrale di attivazione (B) del motore del generatore di pistone, ovvero nell'intervallo di tempo in cui $\frac{d(\Delta\phi)}{dt} = \text{cost}$. Eseguendo in questo intervallo di misure un *fit*¹ nella forma:

$$S_x = A + B\sin(C \cdot n + D) \quad (4.1)$$

dove n è il numero progressivo dell'acquisizione, si ottengono dei valori di $\chi^2 > 0.99$. Considerando in questo tratto la velocità del motore e la frequenza

¹Le operazioni di *fit* sono state compiute utilizzando le *routines* del Numerical Algorithms Group E04FCF per il *fit* non lineare e E04YCF per la stima della matrice di varianza-covarianza.

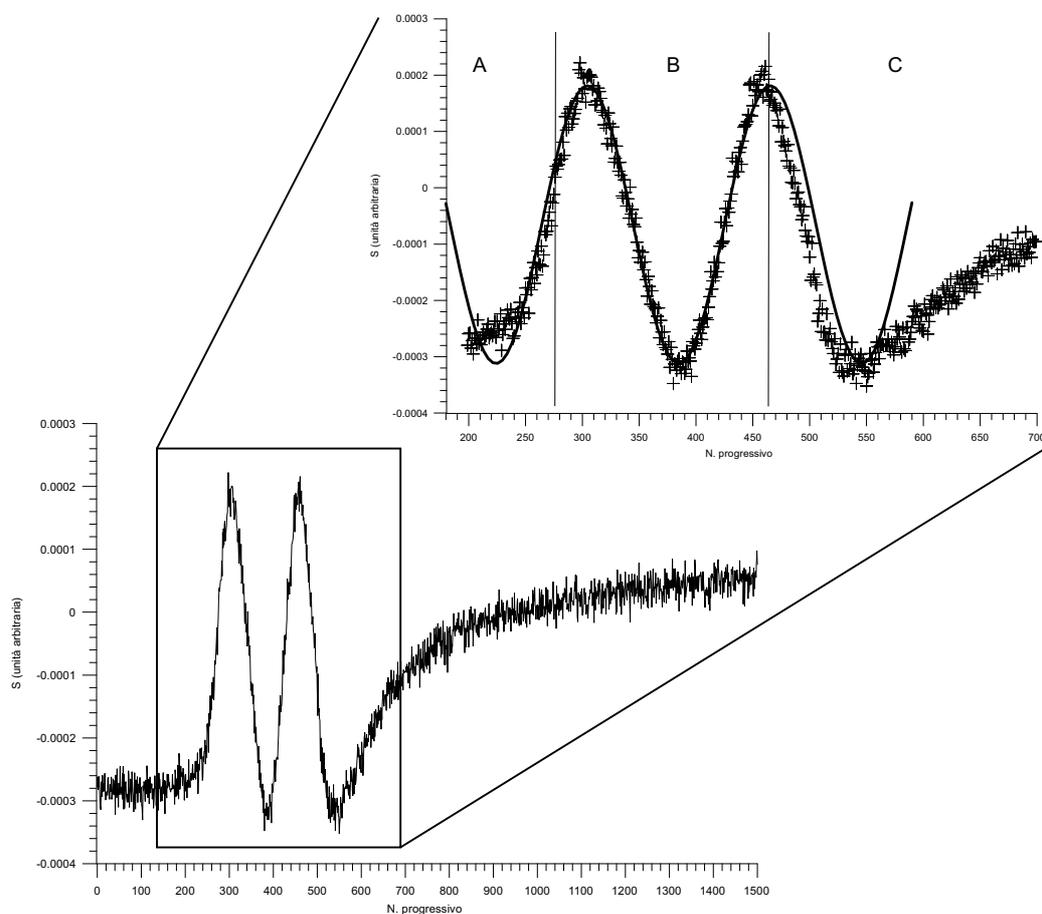


Figura 4.4: Segnale S_x di un elemento sensibile in corrispondenza della discontinuità di fase. Le misure sono acquisite ad una frequenza di $150Hz$ con una modulazione di raggio $(105 \pm 7)\mu m$. Nella fase A lo spintore è in accelerazione, mentre nella B procede a velocità costante, nella C, infine, decelera. La linea continua rappresenta il miglior seno ottenuto compiendo un *fit* sui dati entro l'intervallo B.

di campionamento del SP costanti², si può affermare che si ha effettivamente

²La frequenza di campionamento del SP è quella di acquisizione del CCD, la quale ha una precisione dell'ordine del μs , che a $150Hz$ comporta una precisione dell'ordine di 10^{-4} .

la dipendenza:

$$S_x = A + B \sin(\Delta\phi). \quad (4.2)$$

4.2 Sensibilità del sensore.

Per poter correggere l'errore di pistone con precisioni dell'ordine di $\lambda/10$ o superiori (1.2), i sistemi attivi di controllo 1.3 agiscono iterando il ciclo misura-correzione. Un sensore che debba operare in un sistema reazionato deve avere una risposta lineare e la sua caratteristica principale è la sua sensibilità intorno alla posizione di lavoro. Nel nostro caso il sistema ha lo scopo di annullare la differenza di fase fra i segmenti, dunque la posizione di lavoro si identifica con $\Delta\phi \simeq 0$; in questa approssimazione S_x è lineare e la sua sensibilità S_n risulta:

$$S_n(\Delta\phi = 0) = \left. \frac{dS_x}{d(\Delta\phi)} \right|_{\Delta\phi=0} = B \cos(0) = B \quad (4.3)$$

La sensibilità per piccoli sfasamenti si riduce, quindi, alla semi-ampiezza di $S_x(\Delta\phi)$ e può essere misurata sperimentalmente procedendo ancora come descritto in sezione 4.1. Infatti utilizzando il medesimo *fit* si ottiene il valore di $B = S_n(0)$.

4.2.1 Normalizzazione della scala di sensibilità.

Per poter ricondurre S_n ad una scala non arbitraria, ma riferita ad una quantità fisica, è necessario ripercorrere analiticamente l'elaborazione di S_x .

Il segnale S_x viene generato come già descritto in 3.3. Nel caso specifico

della discontinuità allineata nella direzione y , i conteggi P_i dei *pixels* associati ad una fissata sottoapertura localizzata sulla discontinuità saranno dati da:

$$P_1 = d_1 + a_1 + k_1 f(\Delta\phi)$$

$$P_2 = d_2 + a_2 - k_2 f(\Delta\phi)$$

$$P_3 = d_3 + a_3 + k_3 f(\Delta\phi)$$

$$P_4 = d_4 + a_4 - k_4 f(\Delta\phi),$$

dove d_i sono i conteggi di buio che verranno sottratti dall'elaborazione della BCU, a_i i conteggi che si hanno in assenza di segnale di pistone, k_i sono le ampiezze di modulazione del conteggi sui *pixels* del CCD, mentre $f(\Delta\phi)$ è la funzione normalizzata che descrive l'andamento della modulazione in funzione del pistone differenziale.

Sottraendo i rispettivi d_i e sostituendo nella 3.1 otteniamo:

$$\begin{aligned} \widehat{S}_x &= \frac{(P_1 - d_1 + P_3 - d_3) - (P_2 - d_2 + P_4 - d_4)}{\overline{P}} = \\ &= \frac{[a_1 + a_3 + (k_1 + k_3)f(\Delta\phi)] - [a_2 + a_4 - (k_2 + k_4)f(\Delta\phi)]}{\overline{P}} = \\ &= \frac{a_1 + a_3 - a_2 - a_4}{\overline{P}} + \frac{k_1 + k_3 + k_2 + k_4}{\overline{P}} f(\Delta\phi), \end{aligned}$$

dunque i segnali letti sono:

$$S_x = \frac{a_1 + a_3 - a_2 - a_4}{\overline{P}} - S_{xo} + \frac{k_1 + k_3 + k_2 + k_4}{\overline{P}} f(\Delta\phi),$$

e, confrontando con la 4.2, si ottiene che le grandezze misurate sperimentalmente sono:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_1 + a_3 - a_2 - a_4}{\overline{P}} - S_{xo} \\ B &= \frac{k_1 + k_3 + k_2 + k_4}{\overline{P}} \\ f(\Delta\phi) &= \sin(\Delta\phi). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Essendo nel nostro caso $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$, poiché k_i rappresenta l'ampiezza di modulazione sul singolo *pixel*, si ha che $K := 4k$ è l'ampiezza di modulazione in conteggi del segnale. Quindi vale:

$$sn := Sn(\Delta\phi = 0) = B = \frac{K}{P}.$$

Dunque sn rappresenta il rapporto fra i conteggi relativi al segnale e i conteggi medi su un *pixel* in pupilla. Essendo il numero dei conteggi proporzionale al numero di fotoni incidenti sul *pixels* ed assumendo una distribuzione uniforme di intensità in pupilla, sn rappresenta anche la frazione di fotoni che, a causa del segnale di pistone, vengono spostati da una pupilla all'altra. Risulta quindi che misurando B si esprime la sensibilità del sistema nella sua efficienza fotonica sn .

4.2.2 Sensibilità e modulazione di tilt.

Il SP permette di variare la sua sensibilità cambiando l'ampiezza della modulazione introdotta dallo specchio di tip-tilt (3.3), quindi è stata misurata $sn(R_M)$, dove R_M rappresenta il raggio della circonferenza sulla quale si muove la PSF sul piano focale per effetto dello specchio di tip-tilt. I valori di R_M sono stati misurati ponendo una camera CCD sul piano focale e misurando direttamente il diametro di modulazione attraverso le dimensioni note del *pixel* ($7.4\mu m$) della camera stessa.

I risultati delle misure di $sn(R_M, \Delta\phi = 0)$ sono rappresentati in fig.4.5, dove si notano chiaramente due differenti regimi:

- $R_M > R_{PSF} = 1.22\lambda \cdot f_{\#} = 35\mu m$, si ha un andamento del tipo

$$sn = \frac{L}{R_M}, \quad (4.5)$$

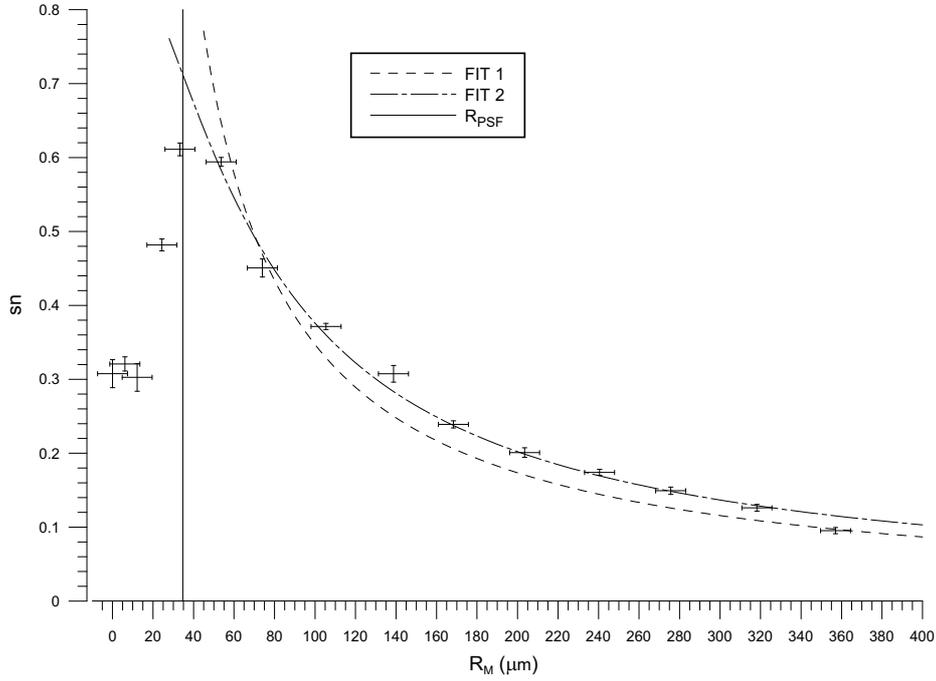


Figura 4.5: In ordinata R_M è il raggio di modulazione introdotta dallo specchio di tilt, in ascisse sn è la sensibilità normalizzata del sensore per $\Delta\phi = 0$. Il passaggio da regime geometrico a diffrattivo avviene proprio per $R_M \simeq R_{PSF}$ (linea verticale continua). Con i dati a $R_M > R_{PSF}$ sono stati eseguiti due *fits* (linee tratteggiate) i cui risultati sono riportati in tab. 4.1.

con L costante, ovvero l'andamento atteso in regime di ottica geometrica per il SP con modulazione di tilt[15];

- $R_M < R_{PSF}$, sn inverte la sua derivata e diminuisce con R_M fino ad un valore di saturazione.

Riguardo al primo caso si nota come l'equazione (4.5) riproduca solo in prima approssimazione l'andamento dei dati; il risultato migliora eseguendo

un *fit* nella forma:

$$sn = \frac{L}{\sqrt{(R_M)^2 + (R_F)^2}}, \quad (4.6)$$

dove R_F si interpreta fisicamente come un secondo termine di modulazione che si somma a R_M .

<i>fit</i>	Funzione	Valori	σ
1	$sn = \frac{L}{R_M}$	$L = 34.7\mu m$	$1.2\mu m$
2	$sn =$	$L = 41.5\mu m$	$1.3\mu m$
	$\frac{L}{\sqrt{(R_M)^2 + (R_F)^2}}$	$R_F = 47\mu m$	$5\mu m$

Tabella 4.1: Risultati dei *fits* rappresentati in fig.4.5.

La modulazione R_F può essere originata dal limite diffrattivo stesso: un fotone proveniente da una sorgente puntiforme ha una distribuzione di probabilità di localizzazione spaziale sul piano focale del sistema ottico rappresentata dalla *PSF* ed ha quindi una probabilità pari a $\sim 84\%$ di essere localizzato in un disco di raggio pari a R_{PSF} sul piano focale[18]; questo può essere visto come una modulazione statistica subita dai singoli fotoni che, essendo incorrelata alla modulazione geometrica, si va a sommare a questa in quadratura.

Il *fit* della (4.6) fornisce un valore R_F confrontabile con R_{PSF} , fatto che incoraggia fortemente questa interpretazione dei dati sperimentali.

Riguardo al comportamento per $R_M < R_{PSF}$ questo può essere giustificato con il passaggio da regime di ottica geometrica a quello diffrattivo. In assenza di aberrazioni e per modulazioni grandi, si osserva, anche sper-

imentalmente, che l'assunzione fatta (in 4.2.1) di distribuzione uniforme di intensità sulla pupilla è in buona approssimazione verificata. Il passaggio al regime diffrattivo comporta il decadere della validità di questa ipotesi: infatti già Lord Rayleigh, nel 1917 nella sua trattazione diffrattiva del test di Foucault [29], aveva giustificato formalmente la presenza di un anello più intenso ai bordi della pupilla, fatto che si riscontra effettivamente sia nelle simulazioni numeriche che nelle misure. Questo comporta che l'intensità media incidente sulle sottoaperture lontane dal bordo sia significativamente minore di \bar{P} , dunque $sn = K/\bar{P}$ risulta essere una sottostima dell'effettiva capacità di sbilanciamento fotonico, sottostima tanto più lontana dal valore effettivo quanto più ci si allontani dal regime di ottica geometrica. Anche in questo caso è comunque significativo riferire la misura ancora a sn : \bar{P} è infatti proporzionale al flusso totale incidente che è un parametro fondamentale per la futura applicazione alla messa in fase di telescopi segmentati³.

4.3 Misura del pistone differenziale.

Lo scopo è quello di misurare la stessa variazione di pistone sia con l'interferometro che con il SP e confrontarne i risultati per differenti valori nell'intervallo $\Delta\phi = 0, 2\pi \text{ rad}$. Le misure sono state eseguite con la seguente procedura:

- inizio della sequenza di acquisizione con il SP;

³Come discusso nell'introduzione lo sviluppo di questa tecnica in campo astronomico richiede l'uso di una stella naturale come sorgente di riferimento. E' così particolarmente critica la magnitudine limite di utilizzo che determina su quanta porzione di cielo la tecnica è utilizzabile.

- acquisizione di un'immagine attraverso l'interferometro;
- azionamento del motore del generatore di pistone;
- atteso l'arresto del motore, acquisizione di una seconda immagine con l'interferometro;
- fine della sequenza di acquisizione con il SP.

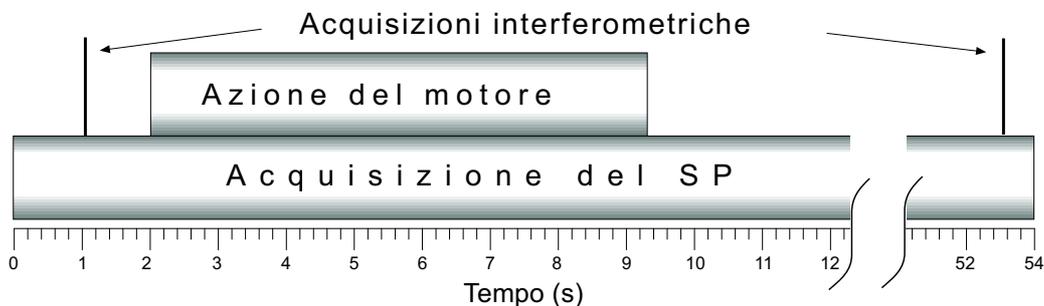


Figura 4.6: Rappresentazione schematica della sequenza temporale delle azioni che compongono la procedura di misura di pistone differenziale.

4.3.1 Misura interferometrica.

Una variazione di pistone produce sull'interferogramma uno scorrimento della frange. Intenzionalmente è stato introdotto nel fronte d'onda un tilt verticale rispetto al fascio di riferimento dell'interferometro, in modo tale che questo fosse l'aberrazione dominante. In questo caso le frange riproducono in prima approssimazione una frequenza spaziale costante su tutta la pupilla. Una variazione di pistone δ sul fronte d'onda produrrà una variazione di fase del sistema di frange pari a $\Delta\phi = \delta \frac{2\pi}{\lambda}$. Chiameremo ora *riferimento* la zona di pupilla riflessa sulla superficie del cubetto vincolato, mentre *mobile* quella

del cubetto che viene traslato dal motore. Prendiamo una colonna di *pixels* sul riferimento e una sul mobile, entrambe mostrano un andamento ancora di tipo sinusoidale con frequenze simili (non identiche a causa di un tilt relativo residuo), ma con fase differente a causa della differenza di pistone. L'azione del motore varia la differenza di pistone delle due superfici e quindi cambierà identicamente la differenza di fase fra le due sinusoidi. Se $\Delta\phi_i$ è lo sfasamento iniziale e $\Delta\phi_f$ quello finale, si ha che la variazione di pistone differenziale introdotta dalla traslazione del mobile è: $\delta\phi = \Delta\phi_f - \Delta\phi_i$.

Dunque eseguendo due *fits* nella forma

$$y = A + B\sin(C \cdot x + \phi),$$

uno su una colonne di *pixels* del riferimento e uno su una colonna della parte mobile si ottiene la misura del pistone differenziale iniziale:

$$\Delta\phi_i = \phi_{Mob_i} - \phi_{Ref_i}.$$

Eseguendo, dopo l'azione del motore, ancora i due *fits* sulle medesime colonne usate per i *fits* precedenti, otteniamo analogamente una stima di $\Delta\phi_f$.

In tab.4.2 sono riportati a titolo esemplificativo i dati ottenuti in una misura. I valori di A, B, C validano a posteriori le ipotesi fatte: l'aberrazione dominante è effettivamente un tilt verticale poiché i conteggi in ogni singola colonna di *pixels* riproducono in buona approssimazione un seno; l'azione del motore varia effettivamente in maniera sensibile il pistone (valori di ϕ), mentre lascia sostanzialmente invariato il tilt verticale (i valori di C , che rappresentano il numero d'onda associato alla frequenza spaziale generata dal tilt verticale, rimangono rispettivamente pressoché invariati). Sempre dai dati in tab.4.2 per questa misura si ottiene:

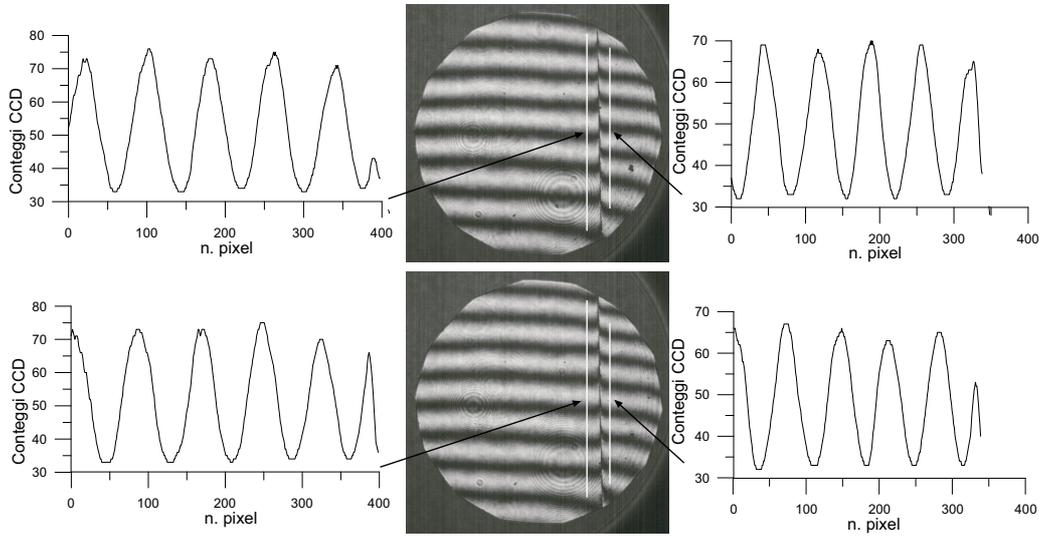


Figura 4.7: Al centro sono riportati gli le immagini acquisite dall'interferometro prima (in alto) e dopo (in basso) lo spostamento relativo delle superfici. Le linee bianche individuano le 2 colonne di *pixels* scelte per la misura di $\Delta\phi$. Ai lati delle immagini sono rappresentati i valori dei conteggi contenuti nelle rispettive colonne.

Curva	$A(\text{Cont.})$	$B(\text{Cont.})$	$C(\text{rad/n.pix})$	$\phi(\text{rad})$
Rif_i	52.1 ± 0.1	20.3 ± 0.2	$(7.75 \pm 0.01) \cdot 10^{-2}$	$(0.9 \pm 1.5) \cdot 10^{-2}$
Rif_f	51.2 ± 0.1	20.6 ± 0.2	$(7.57 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}$	1.25 ± 0.02
Ob_i	49.7 ± 0.1	18.2 ± 0.2	$(8.73 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}$	3.88 ± 0.02
Ob_f	48.7 ± 0.1	16.9 ± 0.2	$(8.68 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}$	7.83 ± 0.02

Tabella 4.2: Esempio di riduzione di dati per la misura di differenza di fase relativa tramite l'analisi degli interferogrammi in fig.4.7. Eseguendo un *fit* della si ottengono i valori di A, B, C, ϕ , ottenendo quindi direttamente il valore della fase.

$$\Delta\phi_i = \phi_{Ob_i} - \phi_{Rif_i} = 3.87 \pm 0.04 \text{ rad}$$

$$\Delta\phi_f = \phi_{Ob_f} - \phi_{Rif_f} = 6.58 \pm 0.04 \text{ rad}$$

$$\delta\phi = \Delta\phi_f - \Delta\phi_i = 2.71 \pm 0.08 \text{ rad}$$

a meno di multipli di 2π .

4.3.2 Misura con SP.

La procedura di riduzione dei dati ottenuti nella sequenza di acquisizione del SP è simile a quella già usata in 4.1. Dimostrata la validità della 4.2, invertendola, si ottiene:

$$\Delta\phi = \arcsin\left(\frac{S_x - A}{B}\right). \quad (4.7)$$

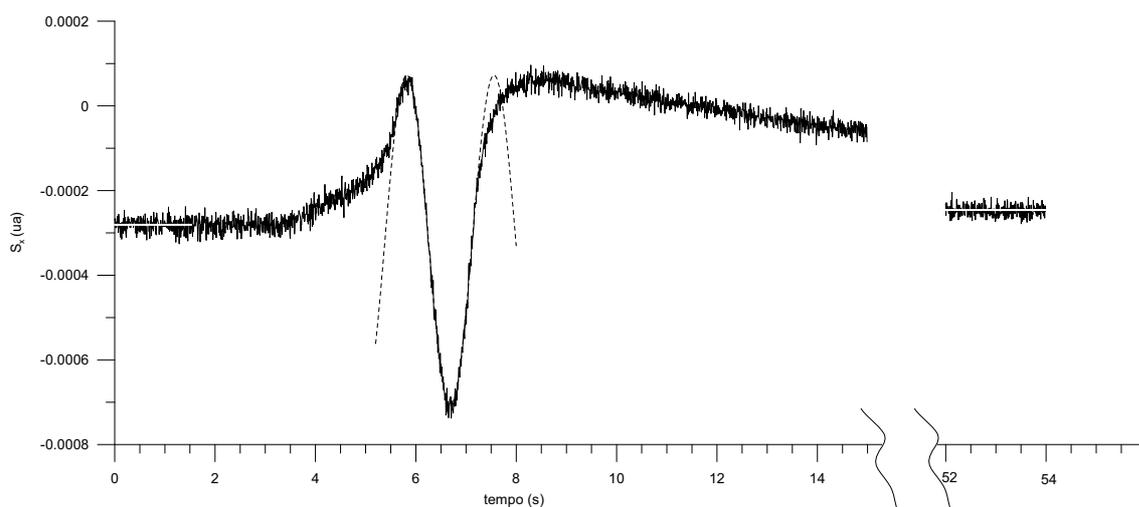


Figura 4.8: Andamento del segnale S_x (in unità arbitrarie) su una sottoapertura in funzione del tempo. S_x^i viene stimato mediando i valori iniziali prima dell'attivazione del motore (il valor medio è rappresentato dalla linea bianca a sinistra), S_x^f mediando i valori una volta che il segnale si sia nuovamente stabilizzato (linea bianca a destra). La linea tratteggiata rappresenta il *fit* compiuto per la stima di A e B da utilizzare nella 4.7.

I valori di S_x^i e S_x^f , relativi rispettivamente ai pistoni differenziali $\Delta\phi_i$ e $\Delta\phi_f$, sono ottenuti come media sulle acquisizioni precedenti l'attivazione

Modulazione di tip-tilt	$R_M = (37 \pm 7)\mu m$
Frequenza di acquisizione SP	$150.16Hz$
Sorgente laser He-Ne	$\lambda = 632.8nm$

Tabella 4.3: I valori dei principali parametri del SP a cui sono state effettuate le misure di pistone differenziale.

del motore e dopo il suo arresto. I valori di A e B sono ottenuti come già descritto in 4.2.

Utilizzando come esempio ancora la misura vista nel paragrafo precedente si ottiene:

$$S_x^i = (-2.813 \pm 0.008) \cdot 10^{-4}ua$$

$$S_x^f = (-2.466 \pm 0.007) \cdot 10^{-4}ua$$

$$A = (-3.20 \pm 0.07) \cdot 10^{-4}ua$$

$$B = (3.92 \pm 0.06) \cdot 10^{-4}ua$$

utilizzando questi valori nella eq.4.7 si ha

$$\Delta\phi_i = (1.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-1}rad$$

$$\Delta\phi_f = (1.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-1}rad.$$

Naturalmente l'inversione della funzione seno introduce un'ambiguità fra gli angoli $\Delta\phi$ e $\pi - \Delta\phi$. Questa indeterminazione è tuttavia solubile poiché i dati ottenuti con la sequenza di acquisizioni del SP permettono di seguire la completa evoluzione temporale del pistone differenziale.

Nella nostra misura di esempio, in particolare, appare evidente dal grafico

in fig.4.8 che la fase iniziale è effettivamente $\Delta\phi_i$, mentre quella finale è $\pi - \Delta\phi_f$. La misura del SP risulta:

$$\delta\phi = \pi - \Delta\phi_f - \Delta\phi_i = 2.85 \pm 0.04 \text{ rad.}$$

La stima dell'errore sulla $\Delta\phi$ si ottiene da:

$$\Delta[\Delta\phi(A, B, S_x)] = \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial A} \right| \cdot \Delta A + \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial B} \right| \cdot \Delta B + \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial S_x} \right| \cdot \Delta S_x \quad (4.8)$$

derivando la 4.7 si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial A} \right| &= \left| \frac{1}{B\sqrt{1 - \frac{(S_x - A)^2}{B^2}}} \right| \\ \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial B} \right| &= \left| \frac{S_x - A}{B^2\sqrt{1 - \frac{(S_x - A)^2}{B^2}}} \right| \\ \left| \frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial S_x} \right| &= \left| \frac{1}{B\sqrt{1 - \frac{(S_x - A)^2}{B^2}}} \right| \end{aligned}$$

che, sostituite nella 4.8, danno:

$$\begin{aligned} \Delta[\Delta\phi(A, B, S_x)] &= \frac{1}{|B|\sqrt{1 - \left(\frac{S_x - A}{B}\right)^2}} \cdot \left(\Delta A + \Delta S_x + \left| \frac{S_x - A}{B} \right| \Delta B \right) = \\ &= \frac{1}{|B|\sqrt{1 - \sin^2(\Delta\phi)}} \cdot \left(\Delta A + \Delta S_x + \left| \sin(\Delta\phi) \right| \Delta B \right) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la 4.2.

Il fattore $\left(|B|\sqrt{1 - \sin^2(\Delta\phi)} \right)^{-1}$ mostra il comportamento del sensore al

variare di $\Delta\phi$:

$$\lim_{\Delta\phi \rightarrow \pm(2i+1)\pi} \frac{1}{|B|\sqrt{1 - \sin^2(\Delta\phi)}} = +\infty \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\left[\frac{1}{|B|\sqrt{1 - \sin^2(\Delta\phi)}} \right]_{\Delta\phi \rightarrow \pm(2i)\pi} = \frac{1}{|B|} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

quindi il SP è insensibile per $\Delta\phi = \pm(2i+1)\pi$, mentre per $\Delta\phi = \pm(2i)\pi$ presenta incertezza minima. Negli intervalli di risposta lineare $\Delta\phi \simeq 0$ (ovvero di interesse per le applicazioni a ciclo chiuso) si può quindi scrivere:

$$\Delta[\Delta\phi(A, B, S_x)] = \frac{1}{|B|} \cdot (\Delta A + \Delta S_x) = \frac{1}{sn} \cdot (\Delta A + \Delta S_x).$$

In queste misure il fatto di avere una modulazione spaziale del pistone differenziale (dovuta al tilt residuo fra le superfici) ha permesso di poter scegliere la sottoapertura in pupilla tale che $\Delta\phi_i$ e $\Delta\phi_f$ siano entrambi il più possibile distanti dai valori $(2i+1)\pi$, al fine di minimizzarne l'errore. Infine l'equazione per $\Delta[\Delta\phi]$ mostra come questo errore sia inversamente proporzionale alla sensibilità dello strumento.

4.3.3 Misure a confronto.

Con i due procedimenti appena descritti sono state effettuate 8 misure per valori diversi di $\delta\phi$. I risultati sono riportati in tab. 4.4.

Riportando in grafico $\delta\phi_{int}$ e $\delta\phi_{SP}$ (fig.4.9), nel caso ideale privo di errori in entrambe le misure, si otterrebbe la retta $\delta\phi_{int} = \delta\phi_{SP}$ bisettrice del primo quadrante. Attribuendo arbitrariamente pari peso a $\delta\phi_{SP}$ e $\delta\phi_{int}$ si può dare una stima dell'accuratezza raggiunta $\Delta[\delta\phi]$ valutando la distanza dei punti

$\delta\phi_{int}(\circ)$	$\Delta[\delta\phi_{int}](\circ)$	$\delta\phi_{SP}(\circ)$	$\Delta[\delta\phi_{SP}](\circ)$	$ \delta\phi_{int} - \delta\phi_{SP} (\circ)$	$\Delta[\delta\phi_{int} - \delta\phi_{SP}](\circ)$
-5	4	1.3	0.7	6	5
23	6	22.9	0.6	0	7
87	5	90	1.1	3	6
155	5	163	2	8	7
201	5	191.2	1.0	10	6
237	5	245.6	1.5	7	7
252	5	257.0	1.7	5	7
327	4	327.7	1.2	1	5

Tabella 4.4: **Colonne 1-4:** i risultati delle 8 misure di variazione di pistone differenziale effettuate con il metodo interferometrico (pedice *int*) e con il sensore a piramide (pedice *PS*). Gli stessi dati sono rappresentati in grafico in fig.4.9. **Colonne 5 e 6:** differenze fra le due stime per ogni misura, tranne un caso le differenze sono tutte consistenti con 0 entro l'errore atteso.

sperimentali dalla retta ideale. Tale distanza si ottiene genericamente come:

$$d(P, r) = \left| \frac{ax_P + by_P + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|,$$

essendo $P = (x_P, y_P)$ il punto ed $r : ax + by + c = 0$ la retta. Nel nostro caso si ottiene $\Delta[\delta\phi] = d(P, r) = |\delta\phi_{int} - \delta\phi_{SP}|$ il cui valor medio sulle misure in tab. 4.4 è $\langle |\delta\phi_{int} - \delta\phi_{SP}| \rangle = 9 \cdot 10^{-2} rad$. Si deve considerare che $\delta\phi$ è ottenuta come differenza di due misure di pistone differenziale $\Delta\phi$; sulla media di tutte le misure posso considerare in prima approssimazione le accuratezze di ciascuna singola misura di $\Delta\phi$ uguali e scorrelate, dunque $\Delta[\Delta\phi] \simeq \Delta[\delta\phi]/\sqrt{2} = 6.4 \cdot 10^{-2} rad$. Riportando questo valore in accuratezza

sull'altezza del pistone differenziale fra le due superfici fisiche si ha $\Delta[\delta] = \delta\phi \lambda/4\pi = 3.2 \text{ nm}$.

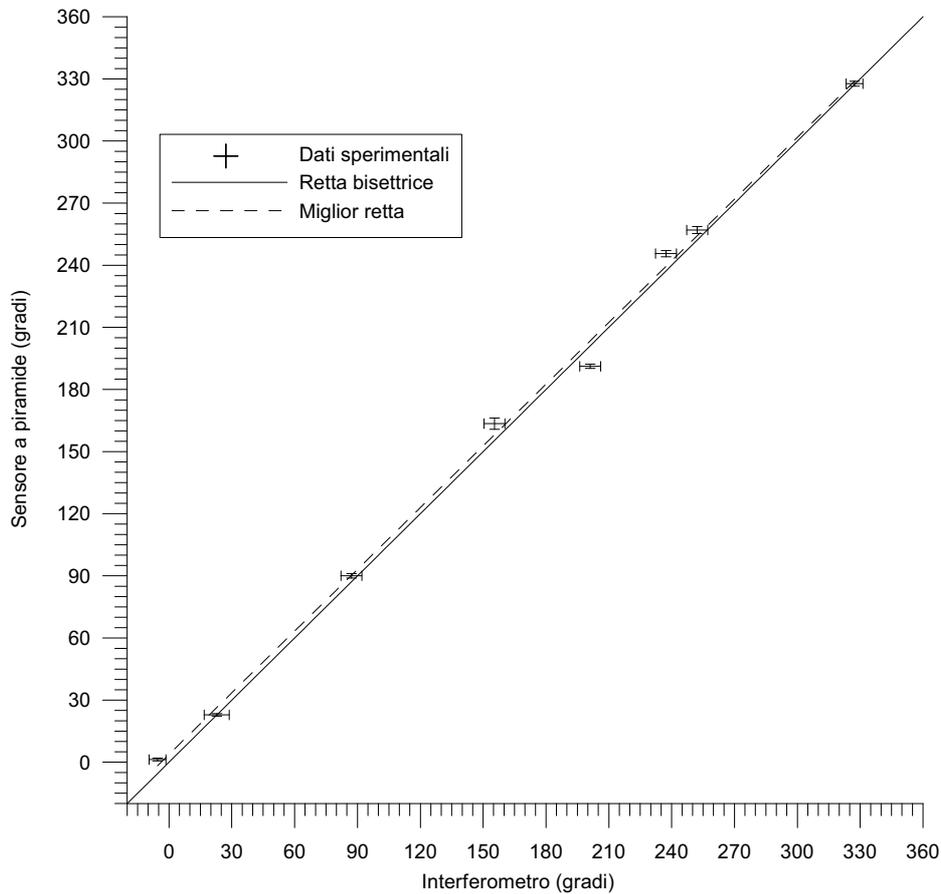


Figura 4.9: In ascissa $\delta\phi_{int}$ ed in ordinata $\delta\phi_{SP}$ per le otto misure riportate in tab.4.4. La linea continua rappresenta la relazione ideale con $\delta\phi_{SP} = \delta\phi_{int}$, mentre quella tratteggiata la miglior retta ottenuta con i punti sperimentali: $\delta\phi_{SP} = 0.993 \cdot \delta\phi_{int} + 3.7^\circ$

Tuttavia questa risulta essere una stima per eccesso poiché è stato attribuito lo stesso peso alle misure interferometriche ed a quelle del SP, mentre si riscontra mediamente $\Delta[\delta\phi_{int}]/\Delta[\delta\phi_{SP}] \simeq 4$. Inoltre questo valore è stato ottenuto con una media anche su misure dove la sensibilità del SP non

è massimizzata, è quindi lecito aspettarsi valori di $\Delta[\delta]$ ancora inferiori per $\delta \simeq 0$.

4.4 Risultati sperimentali ottenuti.

Il lavoro sperimentale presentato nei paragrafi precedenti ha permesso la caratterizzazione del segnale di pistone differenziale generato dal sensore a piramide.

Nel paragrafo 4.1 è stata verificata sperimentalmente la dipendenza sinusoidale del segnale dal pistone differenziale del fronte d'onda (eq.4.2). Questo risultato è in accordo con quanto ricavato utilizzando formule analitiche (par.2.1) e simulazioni numeriche (par.2.2). Come già accennato questo tipo di relazione permette di utilizzare il sensore in un ciclo reazionato sensore-correttore. Nel caso trattato di luce monocromatica, questa relazione porta con sé un'ambiguità di fase di π rad sul fronte d'onda. Questo comporta che l'iterazione misura-correzione possa convergere non solo a $\Delta\phi = 0$, ma ad ogni $\Delta\phi = k2\pi$ con k intero. Questa ambiguità può essere rimossa utilizzando per la misura 2 o 3 lunghezze d'onda differenti come riportato da vari autori.

Nella sezione 4.2 è stata poi misurata la sensibilità del sensore per $\Delta\phi = 0$ e studiata la sua dipendenza dalla modulazione introdotta dallo specchio di tip-tilt. Per grandi modulazioni (raggio di modulazione R_M maggiore del raggio della PSF R_{PSF}) si è verificata la proporzionalità inversa ricavata nella sezione introduttiva in regime di ottica geometrica. Per piccole modulazioni gli effetti diffrattivi limitano la sensibilità generando un massimo di questa per $R_M \simeq R_{PSF}$. La condizione di massima sensibilità per il sensore Dunque

è stata determinata sperimentalmente e giustificata.

Il valore della sensibilità massima risulta $0.66/rad$. Ciò mostra come il segnale generato da $1 rad$ di pistone differenziale sia misurato utilizzando il 66% dei fotoni ricevuti.

Infine è stata misurata l'accuratezza delle misure di pistone differenziale mettendole a confronto diretto con quelle ottenute con metodo interferometrico. E' stato ricavato un errore medio rispetto alla retta teorica di $3.2nm$ sulla superfici riflettenti. Questa, tuttavia, è risultata essere una stima per eccesso a causa del metodo utilizzato. Questo valore può essere confrontato con i valori ottenuti con il sensore di SH al telescopio Keck (tab.1.3) che sono di un'accuratezza pari a $6nm$ per il metodo a banda stretta.

Capitolo 5

Applicazione astronomica.

A partire dai dati ottenuti e presentati nel capitolo precedente, è possibile fare ulteriori considerazioni nell'ottica dell'applicazione astronomica del SP come sensore di messa in fase di specchi segmentati.

Conoscendo l'accuratezza del sensore e supponendo teoricamente che sia possibile raggiungere questo limite nell'errore RMS della messa in fase, si può stimare, utilizzando l'eq.1.3, la Strehl ratio dovuta all'errore di pistone sui segmenti. Per i 36 elementi dello specchio primario del Keck, con $\lambda = 550nm$, un errore di $6.4nm$ RMS sul fronte d'onda si traduce in una $SR = 0.995$.

Per il momento come unico limite al sensore è stata considerata la sua accuratezza, ma, volendo adottare come sorgente una stella naturale, è indispensabile valutare l'effetto del rumore fotonico.

In particolare è possibile stimare la magnitudine limite teorica che consente al sensore di lavorare con la massima accuratezza. La statistica di Poisson stabilisce che per un flusso di $N \gamma/s$ si ha una fluttuazione del segnale del sensore calcolato come in 3.1 pari a $1/\sqrt{N} \gamma/s$. Esprimendo la sensibilità

del sensore in termini di pistone differenziale sugli specchi δ , si trova:

$$\frac{dS_x}{d\delta} = 2 \frac{dS_x}{d\Delta\phi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 1.1 \cdot 10^{-2} nm^{-1} \quad (5.1)$$

dove si è considerato $\lambda = 750nm$.

Il rumore fotonico genererà quindi un RMS di segnale pari a quello generato da un gradino

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{d\delta}{dS_x}. \quad (5.2)$$

Ponendo $\delta = 3.2nm$, pari cioè al calore misurato in 4.3.3 si ottiene $N=807$, che è quindi il numero di fotoni che genera per fluttuazione un rumore pari all'accuratezza del sensore. E' possibile esprimere questo dato in magnitudine stellare assumendo dei parametri tipici per il sensore e per il telescopio: segmenti di $2m^2$ di superficie, 4 sottoaperture su ogni segmento, banda di $50nm^1$, $30s$ di integrazione, efficienza complessiva (considerando sia quella delle ottiche che del sensore) pari a 0.1. La magnitudine limite che si ottiene è $m_R = 16.9$.

E' necessario ricordare che questi valori non prendono in considerazione la turbolenza atmosferica. Integrando con il rivelatore per tempi dell'ordine di $30s$ è possibile mediare gli effetti dell'atmosfera, ma perché questo avvenga è necessario evitare la saturazione del sensore. Come descritto nella sezione 1.4.3, variando l'ampiezza di modulazione si modifica il guadagno del sensore e quindi il suo intervallo dinamico. Alla luce di quanto detto si può prevedere

¹La banda deve essere sufficientemente stretta da potersi approssimare alla condizione di monocromatismo.

di impiegare un'ampia modulazione, dell'ordine di $10\lambda/D$; dalle misure ottenute ed esposte in 4.2.2 si ha che ad una modulazione $R_M = 276\mu m$ la sensibilità è ridotta a $0.15/rad$. Riproponendo analogamente il calcolo appena eseguito per la magnitudine limite si ottiene $m_R = 13.7$.

5.1 Prossimi sviluppi sperimentali.

Grazie alla conferma sperimentale fornita dal lavoro di tesi, è in via di realizzazione un ulteriore test di laboratorio. L'innovazione principale di questa seconda fase è data dall'utilizzo di uno specchio segmentato in sostituzione del generatore di pistone (3.2). Questo dispositivo di nuova generazione è un MEMS (*Micro Electro Mechanical System*) prodotto dalla *Boston Micromachines Corporation*, ed è costituito da una matrice di attuatori a lamine parallele elettrostatiche ai quali sono solidali specchi piani quadrati di $300\mu m$ di lato. Il MEMS a disposizione per l'esperimento consiste in una matrice di 12 attuatori per lato per un'apertura complessiva quadrata di $3.6mm \times 3.6mm$. L'intero dispositivo può essere controllato remotamente attraverso un *personal computer* avendo così il controllo di ogni singolo attuatore.

Questo dispositivo simula dunque efficacemente uno specchio segmentato ad elementi quadrati e pistone variabile; permetterà quindi di verificare il comportamento del sensore in presenza di più gradi di libertà. Sarà possibile misurare la matrice di interazione e confrontare i risultati con quanto ottenuto nelle simulazioni da Esposito nel 2001 [11].

Inoltre il controllo attivo del pistone di ciascun segmento permetterà di formare un ciclo di iterazione misura-correzione fra sensore, personal computer e MEMS. Si creeranno così condizioni del tutto analoghe a quelle della cali-

brazione di un sistema attivo di allineamento (1.3), permettendo di valutare l'effettiva efficienza del sensore in termini di RMS del pistone residuo sui 140 segmenti. Utilizzando opportuni filtri al fine di diminuire il flusso fotonico, si potrà anche misurare l'andamento dell'accuratezza di allineamento al diminuire dell'intensità incidente.

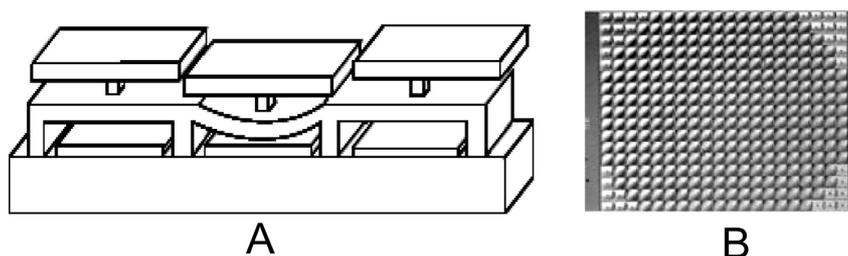


Figura 5.1: **A**: rappresentazione schematica del profilo di tre attuatori di cui il centrale eccitato. **B**: fotografia microscopica dell'intera superficie del MEMS composto da 140 segmenti.

Nessuna isteresi	
<i>fill-factor</i>	$> 98\%$
Corsa	$2\mu m$
Ripetibilità	$2nm$
Banda passante	$7kHz$
Durata	500M cicli a 1/2 corsa

Tabella 5.1: Principali caratteristiche tecniche del MEMS.

Una ulteriore fase sperimentale è stata programmata al *William Herschel Telescope* per il Novembre 2004 in collaborazione con l'*Isaac Newton Group* di la Palma (Spagna) e la *University of Durham* (Regno Unito). Questo

strumento di $4.2m$ di diametro è dotato di un sistema di ottica adattiva chiamato NAOMI (*Natural-guide-star AO for Multi-purpose Instrumentation*)[24], il cui correttore è costituito da uno specchio segmentato composto da 76 elementi quadrati di $7.6mm$ di lato. Ognuno di questi è provvisto di tre attuatori che ne permettono il movimento in tip, tilt e pistone. L'allestimento di questo esperimento prevede il trasporto al WHT del sensore di fronte d'onda a piramide di LBT e la sostituzione al posto dell'usuale sensore SH di NAOMI. Lo specchio segmentato di NAOMI è coniugato alla pupilla del telescopio in modo che l'immagine di quest'ultima ha un diametro di 7.3 segmenti. La pupilla immaginata dal SP sarà del tutto equivalente a quella di uno specchio primario di $4.2m$ di diametro segmentato ad elementi quadrati di $0.58m$ di lato. In questa configurazione sarà possibile valutare l'efficacia delle correzioni di tutti e tre i gradi di libertà di ciascun elemento. Inoltre utilizzando come sorgente di riferimento una stella potrà essere verificata l'effettiva incidenza della turbolenza atmosferica sul procedimento di allineamento e la reale magnitudine limite del sensore.

5.2 Il progetto *Active Phasing Experiment* (APE).

La proposta di utilizzare il SP come sensore di fase per specchi segmentati è stata valutata dall'*European Southern Observatory* ed accolta all'interno di APE [17].

Con questo progetto l'ESO intende comparare e valutare le prestazioni di sensori di fronte d'onda per la messa in fase di specchi segmentati con parti-

colare riferimento all'ELT europeo OWL avente diametro previsto di 100m [3]. L'esperimento APE ha come scopo il test sia in laboratorio che al telescopio di 3 sensori di pistone, in particolare quest sono il sensore a piramide, quello di Mach-Zender e quello di curvatura. E' allo stato di studio un sistema ottico che permetta ai tre nuovi sensori, ad un sensore tipo SH ed ad un sistema di metrologia interna di esaminare lo stesso fronte d'onda, così da poter ottenere un confronto diretto fra i differenti dispositivi.

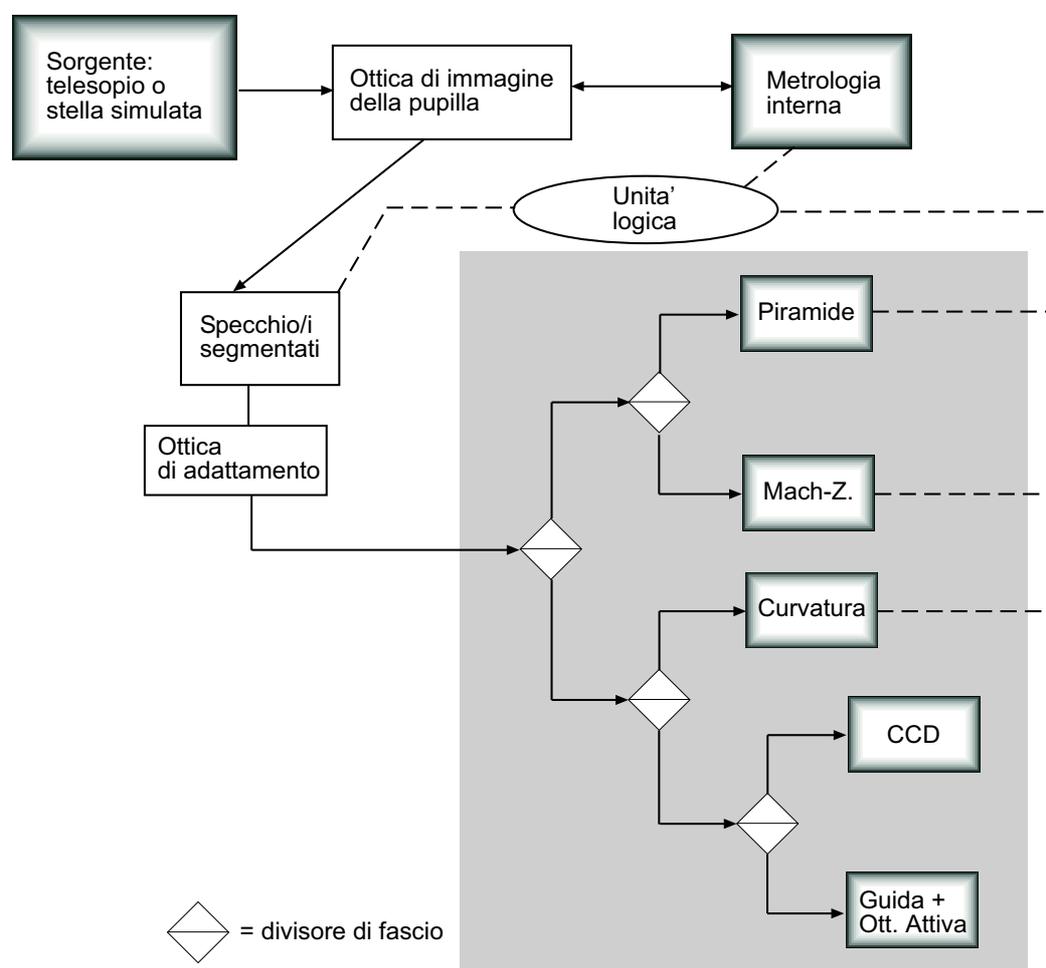


Figura 5.2: Schema logico semplificato del sistema sperimentale in studio per APE.

L'esperimento prevede tre livelli di test per i sensori di fronte d'onda:

- misura delle prestazioni in laboratorio con sorgente puntiforme policromatica;
- misura delle prestazioni in laboratorio con sorgente puntiforme policromatica aberrata da un simulatore di turbolenza atmosferica;
- misura delle prestazioni in presenza di un dispositivo di guida e un sensore di ottica attiva, in condizioni reali al fuoco di una unità del *Very Large Telescope*.

Inoltre sono state fissate le caratteristiche di prestazione che i sensori dovranno soddisfare:

1. frequenza del ciclo iterativo sensore-correttore minimo $1Hz$, obiettivo $10Hz$;
2. errore residuo di pistone sul fronte d'onda riflesso da 2 specchi deformabili² inferiore a $50nm$ RMS, obiettivo entro $30nm$ RMS;
3. tempo impiegato dal sistema al raggiungimento del livello di correzione richiesto inferiore a $90s$ per condizioni iniziali di pistone $20\mu m$ piccovalle, e a $45s$ per $5\mu m$;
4. m_v limite inferiore a 8, obiettivo 10;
5. condizioni di *seeing* $\leq 1.0''$ FWHM a $550nm$ nella direzione di osservazione.

²E' previsto che gli specchi segmentati posti nel cammino ottico siano 2 per simulare le condizioni che si verificheranno con strumenti come OWL il cui disegno ottico prevede sia primario che secondario segmentati.

Il progetto APE è stato finanziato dalla Comunità Europea nell'ambito del programma FP6 come *workpackage* inserito nella raccolta di fondi per lo studio di fattibilità di un ELT europeo.

Conclusioni.

Lo sviluppo di una nuova tecnica per la messa in fase degli elementi di uno specchio segmentato è un punto chiave per lo sviluppo degli *ELT*. Nel 2001 [11] è stato proposto l'uso del sensore di fronte d'onda a piramide in configurazione adattiva come sensore per l'allineamento e la messa in fase dei segmenti.

Nel lavoro di tesi sono stati sviluppati conti analitici e simulazioni numeriche per quantificare il segnale prodotto da questo sensore nel caso della misura di una discontinuità del fronte d'onda. E' stata fatta la prima caratterizzazione sperimentale del sensore a piramide come rivelatore di pistone differenziale. In breve i risultati sperimentali ottenuti sono la verifica della dipendenza sinusoidale del segnale dal pistone, già messa in evidenza dai risultati numerici e di simulazione, la misura dell'accuratezza e della sensibilità del sensore.

L'accuratezza delle misure di pistone risulta dai dati di laboratorio pari a $3.2nm$, più che sufficiente ad ottenere un corretto posizionamento dei segmenti del telescopio. I dati di laboratorio hanno permesso di valutare la sensibilità del sensore, ovvero il rapporto fra segnale del sensore ed errore di pistone. Questa quantità è stata ricavata in funzione dell'ampiezza di modulazione del sensore.

La conoscenza della sensibilità ha permesso di stimare la magnitudine richiesta alla stella di riferimento per ottenere un errore di pistone residuo pari all'accuratezza ottenuta in laboratorio. La magnitudine in banda R ($0.75\mu m$) risulta di 13.7. Data la densità di stelle di $m_R \leq 14$ pari in media a 720 stelle per grado quadro e considerando un campo di vista del sensore di $5'X5'$, quest'ultimo risultato mostra come il processo di allineamento del telescopio possa essere compiuto puntando in una qualsiasi direzione in cielo.

La fase sperimentale ha quindi dimostrato la capacità di questo sensore di rivelare la differenza di fase di un fronte d'onda discontinuo e la possibilità del suo impiego come sensore di messa in fase di telescopi a specchio segmentato. La successiva fase sperimentale è già in realizzazione in laboratorio, mentre una terza è stata programmata a breve al *William Herschel Telescope*. Infine la proposta di usare il sensore a piramide come sensore di pistone differenziale è stata valutata dall'*European Southern Observatory* ed accolta all'interno dell'*Active Phasing Experiment*.

Bibliografia

- [1] P. Alvarez et al., *The GTC 10-m Telescope Project: in the midst of integration*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [2] T. Andersen et al., *Status of the Euro50 Project*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [3] E. Brunetto, P. Dierickx et al., *OWL phase A report*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [4] G. Chanan, *Wavefront curvature sensing on highly segmented telescopes*, proc. of SPIE 4840 (2002)
- [5] G. Chanan, J. Nelson e T. Mast, *Segment alignment for the Keck telescope primary mirror*, proc. of SPIE 628 (1986)
- [6] G. Chanan, C. Ohara e M. Troy, *Phasing the mirror segments of the Keck II: the narrow-band phasing algorithm*, Applied Optics Vol. 39, n.25 (2000)
- [7] G. Chanan, M. Troy, *Strehl ratio and modulation transfer function for segmented mirror telescopes as functions of segment phase error*, Applied Optics Vol. 38, n. 31 (1999)

- [8] G. Chanan, M. Troy et al., *Phasing the mirror segments of the Keck telescopes: the broadband phasing algorithm*, Applied Optics Vol. 37, n.1 (1998)
- [9] G. Chanan, M. Troy e C. Ohara, *Phasing the primary mirror segments of the Keck telescopes: A comparison of different techniques*, proc. of SPIE 4003 (2000)
- [10] R. M. Clare e R. G. Lane, *Wavefront sensing from spatial filtering at the focal plane*, proc. of SPIE 5169 (2003).
- [11] S. Esposito, N. Devaney, *Segmented telescopes co-phasing using Pyramid Sensor*, proc. Beyond Conventional Adaptive Optics (2001)
- [12] S. Esposito, O. Feeney et al., *Laboratory test of a Pyramid Wavefront Sensor*, proc. of SPIE 4007 (2000)
- [13] S. Esposito, A. Tozzi et al., *First Light Adaptive Optics System for Large Binocular Telescope*, proc. of SPIE 4839 (2003)
- [14] S. Esposito, A. Tozzi et al., *Development of the first-light AO system for the large binocular telescope*, proc. of SPIE 5169 (2003)
- [15] O. A. Feeney, *Theory and Laboratory Characterisation of Novel Wavefront Sensor for Adaptive Optics Systems*, Ph.D. thesis (2001)
- [16] L. M. Foucault, *Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté*, Ann. Obs. Imp. Paris 5 (1859)

-
- [17] F. Gonte, N. Yaitskova, et al., *APE: a breadboard to evaluate new phasing technologies for a future European giant optical telescope.*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [18] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Book Company (1968)
- [19] J. Hartmann, *Bemerkungen uber den Bau und die Justirung von Spektrographen*, Z. Instrumentenk., 20, 47 (1900)
- [20] J. Hill, P. Salinari, *The Large Binocular Telescope Project*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [21] M. Iye, *Concept study of Japanese Extremely Large Telescope*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [22] M. Johns et al., *Status of the Giant Magellan Telescope (GMT) project*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [23] K. Meiring, et al., *The South African Large Telescope (SALT) Project: progress and status after 4 years*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [24] R. Myers, A. Longmore et al., *The NAOMI Adaptive Optic System for the 4.2m William Herschel Telescope*, proc. of SPIE 4839 (2002)
- [25] L. Montoya, N. Yaitskova et al., *Mach-Zender wave front sensor for phasing of segmented telescopes*, proc. of SPIE 4840 (2002)
- [26] J. Nelson, *TMT status*, proc. of SPIE 5489 (2004)
- [27] B. Platt e R.V. Shack, *Lenticular Hartmann-screen*, Newsletter 5, 15, University of Arizona (1971)

- [28] R. Ragazzoni, *Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism*, J. of Mod. Opt. 43 (1996)
- [29] Lord Rayleigh, *On methods for detecting small optical retardations, and on theory of Foucault test*, Phil. Mag. (1917)
- [30] A. Riccardi, *Analisi e sviluppo di un nuovo sensore per sistemi ottici adattivi, basato sul test di Foucault*, tesi di laurea, Università degli Studi di Firenze (1996)
- [31] A. Tozzi, *Studio e progettazione di un nuovo sensore di fronte d'onda per il Large Binocular Telescope*, tesi di Scuola di specializzazione in Ottica, Università degli Studi di Firenze (2001)
- [32] N. Yaitskova, K. Dohlen, P. Dierickx, *Diffraction in OWL: effects of segmentation and segments edge misfigure*, proc. of SPIE 4840 (2002)
- [33] *Keck's First-Light*, Science vol.250 (1990)

Ringraziamenti.

Il mio primo grazie è per i miei genitori che mi hanno sempre sostenuto e permesso di compiere la scelta di questi studi.

La mia riconoscenza è per tutto il gruppo LBT che mi ha da subito accolto in un'atmosfera amicale e stimolante. In particolare Simone, Andrea, Alfio, Armando e Paolo hanno dato con grande pazienza un notevole contributo umano e scientifico a questo lavoro.

Ringrazio Cristina per essermi stata vicina, gli amici di sempre Massimiliano e Gianfranco, i compagni DOC e Hevol per la loro presenza in questi anni.

Ringrazio i ragazzi del *Cinese* per il clima gioviale e lo spirito di gruppo che hanno dimostrato.

Infine, ma non per importanza, un grazie al prof. Righini che ha svolto un ruolo decisivo nei momenti più difficili di questo Corso di Laurea.